

King 盤の RSK 対応

小林雅人

神奈川大学

松村朝雄（国際基督教大学）との共同研究

2025/8/19

1 インTRODクシヨン

2 King 盤

3 主定理

4 展望

概要

King 盤（ヤング盤タイプ C 理論）に関する **RSK 対応** の紹介。これは、特殊なケースとして半標準ヤング盤の RSK 対応を含む。

主定理

- タイプ C RSK 対応
- コーシー等式の双対性
- 半標準振動盤の対称性とニュートン多面体の飽和性

特に関連する文献

Berele (1986)

タイプ C の RS 対応

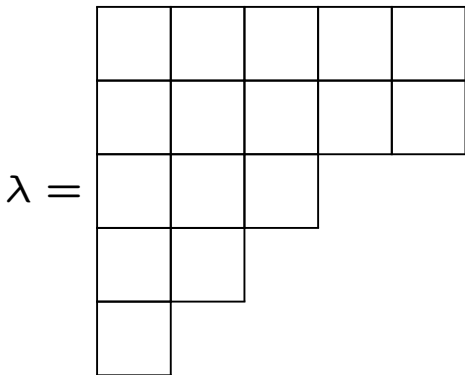
Terada, Sundaram (1990)

タイプ C の RSK 対応のアイデアを示唆

Lee (2025)

半標準振動盤を導入

分割 (Young 図形) とは自然数の有限の広義単調減少列。



Young 盤とは、Young 図形の箱それぞれに数字を入れたもの。

8	1	6	2
4	7	7	

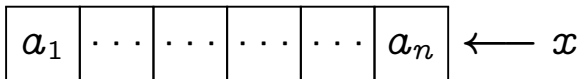
ヤング盤が**半標準**とは、箱の数字が次の 2 条件を満たすこと。

- 行は広義単調増加。
- 列は狭義単調増加。

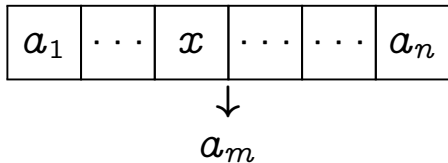
1	1	1	5
4	6		
8	8		

以下、盤の数字に $1, \dots, k$ を使うとする。

Schensted 行挿入



- まず x よりほんとうに大きい数字で最も左にあるものを探す。(もしそのようなものがなければ x を末尾に加える) そして、それを x と入れ換え、行からはじき出す。



行挿入のアルゴリズム

T を半標準盤とする。

$T \leftarrow x$: x を T の 1 行目に挿入して、はじき出した数字を x_1 とする。次に、 x_1 を 2 行に挿入し、はじき出した数字を x_2 とする。

例

$$T =$$

1	1	5	6
2	3		

$$T \leftarrow 4 =$$

1	1	4	6
2	3	5	

事実

T が半標準盤ならば、 $T \longleftarrow x$ もそうである。

したがって、自然数の語 $w_1 \cdots w_n$ から

$$\left(\boxed{w_1} \longleftarrow \cdots \right) \longleftarrow w_n.$$

により盤を構成できる。これを " $P(w_1 \cdots w_n)$ " と表す。

1 インTRODクシヨン

2 King 盤

3 主定理

4 展望

King 盤

まず、バーつきの数字 $\overline{1}, \dots, \overline{k}$ を用意し、全順序を次のように決める。

$$[\overline{k}] = \{1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \dots < k < \overline{k}\}$$

定義

King 盤とは文字が $[\overline{k}]$ に含まれ、 n 上の盤で次の条件をみたすもの。

- 行は広義単調増加
- 列は狭義単調増加
- i 行の数字は i 以上

例

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & \bar{2} & & \\ \hline \bar{3} & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{は King.}$$

$$\text{しかし、 } U = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & \bar{2} & & \\ \hline \bar{2} & & & \\ \hline \end{array}$$

はそうではない。 $\bar{2}$ が 3 行にあるため。

Berele 挿入

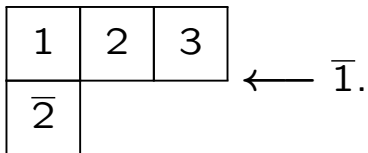
King 盤 T と文字 x に対して $T \longleftarrow_c x$ を定義しよう。type A の挿入と次の例外を除いては一致。

もし i 行が $\bar{i}$ を含み、さらに i を挿入することになったら、最も左にある $\bar{i}$ を削除する。

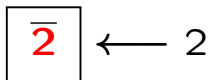
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \dots & \bar{i} & \bar{i} & \dots \\ \hline \end{array} \longleftarrow i$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \dots & & \bar{i} & \dots \\ \hline \end{array}$$

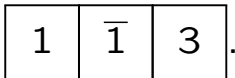
そして jeu de taquin を行い、新しい盤を構成。(詳細は省略)



2 行では



が起きるので、ペア ($\overline{2}$, 2) を消す。結果は



タイプ C の RS に向けて

RS 対応とは、 w (語) に対し、
 $w \mapsto (P(w), Q(w))$ という盤のペアを対応させるものである。

タイプ C は、タイプ A の RS 対応を模倣すればできる。

ただし、箱の削除が起こるので…

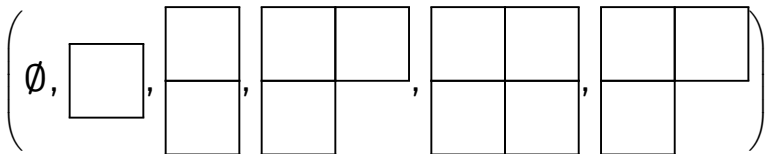
適切な Q シンボルは何か？

それは 振動盤。

定義

振動盤 (OT) とは分割の有限列で $\emptyset$ から始まり、各ステップで箱を 1 つ加えるか削るもの。OT S が k -OT であるとは、 S のすべての分割が高々 k 行におさまること。

例



箱の追加・削除をすべて盤に記録し、数字の**列**を入れた盤で表す。

1	3
2	45

定理 Berele (1986)

ある全単射

$$[\overline{k}]^n \rightarrow \bigcup_{\lambda} \text{KT}_k(\lambda) \times \text{OT}_{kn}(\lambda)$$

$$w \mapsto (P(w), Q(w))$$

が存在。

type A	✓ RS	✓ RSK
type C	✓ RS (Berele)	

タイプ C の RSK を構成したい。

どうすればよい？ もちろんタイプ A の RSK 対応を模倣すればよい。語の代わりに **Knuth array** を用いる。

Def

Knuth array w とは、行列

$$w = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

で $u_j \in [l]$, $v_j \in [k]$ であり、さらに次の条件を満たすもの:

- $u_j \leq u_{j+1}$.
- $u_j = u_{j+1} \implies v_j \leq v_{j+1}$.

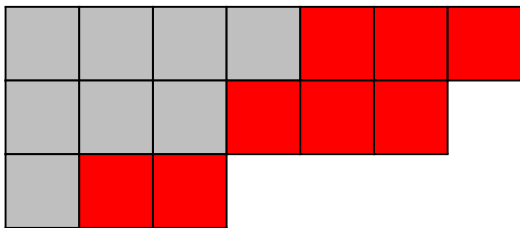
このようなものの集合を $\mathcal{A}_k^l$ で表す。

タイプ C の RSK 対応の構成で次に考えるべきこと：

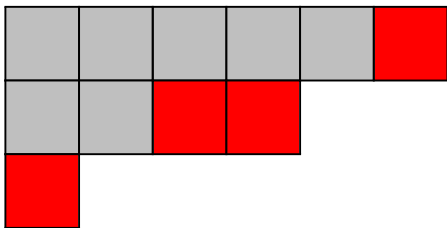
Q-シンボルは何にすべきか？

Sundaram, Terada (1990) のときには、このような対象の定式化はまだなかった。ただ、Lee (2025) が導入した **"SSOT"** を使うとよいことが判明。

箱の集合が**歪ヤング図形**であるとは、包含関係にある 2 つのヤング図形の差として表せることである。



歪ヤング図形が**水平帯**であるとは、 各列に高々 1 つの箱を含むことを言う。



Def

形が λ の k **半標準振動盤** (k -**SSOT**) とは分割の列 $S = (S^1, S'^2, S^2, S'^3, \dots, S'^k, S^k)$ で次を満たすもの。

- $S^i \supseteq S'^{i+1}$ かつ $S'^i \subseteq S^i$. さらに、これらの差は水平帯。
- $S^k = \lambda$.

記号 $\text{SSOT}_k(\lambda)$ でこのような盤の集合を表す。

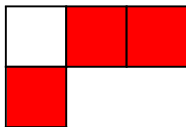
ステップ 1 箱の追加



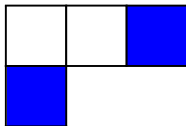
ステップ 2 削除



ステップ 2 追加



ステップ 3 削除



ステップ 1 箱の追加

1	1
---	---

ステップ 2 削除

	2
--	---

ステップ 2 追加

	2	2
2		

ステップ 3 削除

		3
3		

したがって、

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 122 & 23 \\ \hline 23 & & \\ \hline \end{array}.$$

OT は**標準的**（中の数字がすべて異なる）な SSOT であるといえる。

1	3
2	45

これで準備が整った！

$$w = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \text{ からペア } (P(w), Q(w))$$

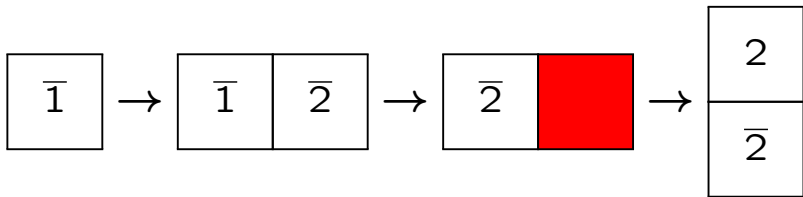
を構成：

まず $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$ とする。

$$P_j := P_{j-1} \longleftarrow v_j.$$

Q_j は SSOT で $P_j \longleftarrow v_j$ の追加あるいは削除された箱の場所に u_j を記録。最後に $(P(w), Q(w)) = (P_n, Q_n)$ とする。

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \bar{1} & \bar{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$(P(w), Q(w)) = \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \bar{2} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 12 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right)$$

1 インTRODクシヨN

2 King 盤

3 主定理

4 展望

タイプ C RSK 対応

主定理 1 [K-Matsumura]

$$\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa} \rightarrow \bigcup_{\lambda} \text{KT}_{\kappa}(\lambda) \times \text{SSOT}_{\kappa}(\lambda),$$
$$w \mapsto (P(w), Q(w))$$

は全単射。

証明のアイディア: Knuth array の標準化を用いると Belere の RS 対応が使えて証明ができる。 ■

タイプ C RSK の応用？

- *Cauchy* 等式
- ss_λ の対称性
- ss_λ のニュートン多面体の飽和性

$x = (x_1, \dots, x_k)$ とする。
ヤング盤 T の **重み**は、

$$x^T = \prod_{i,j} x_{T(i,j)}.$$

Schur 多項式とは

$$s_\lambda(x) = \sum_{T \in \text{SSYT}_k(\lambda)} x^T.$$

Cauchy 等式

$$\prod_{i,j=1}^k (1 - x_i y_j)^{-1} (1 - x_i^{-1} y_j)^{-1} \\ = \sum_{\ell(\lambda) \leq k} s_{\lambda}(x^{\pm}) s_{\lambda}(y)$$

この展開はタイプ A RSK で導くことができる。

**それならば、タイプ C でも同様のことができるの
では？**

タイプ C の生成関数

Symplectic Schur 関数

$$sp_{\lambda}(x^{\pm}) = \sum_{T \in \text{KT}_k(\lambda)} x^T$$

with $x_{\bar{i}} = x_i^{-1}$.

SSOT 関数 (新しいもの)

$$ss_{\lambda}(y) = \sum_{S \in \text{SSOT}_k(\lambda)} y^S.$$

Cauchy 等式の双対性

主定理 2

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x^{\pm}) s_{\lambda}(y) \\ &= \prod_{i,j=1}^k (1 - x_i y_j)^{-1} (1 - x_i^{-1} y_j)^{-1} \\ &= \sum_{\lambda} \textcolor{red}{sp}_{\lambda}(x^{\pm}) \textcolor{red}{ss}_{\lambda}(y). \end{aligned}$$

証明.

最初の $=$ は RSK A. 次の $=$ は RSK C. □

事実

- $s_\lambda(x)$ は対称。
(Bender-Knuth 1972)
- $sp_\lambda(x^\pm)$ は B_{2k} -対称。 (Gutiérrez 2024)

主定理 3

$ss_\lambda(y)$ も対称。

証明は、Sundaram の Burge array の議論を改良する。

ss_λ の性質をさらに調べたい。

$f = \sum c_a x^a \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_k]$ を多項式、その
台を

$$\text{supp } f = \{a \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^k \mid c_a \neq 0\}$$

とする。 f の **ニュートン多面体** は、

$$\text{New}(f) = \text{conv}(\text{supp } f) \left(\subseteq \mathbf{R}^k \right).$$

定義

f が **SNP** (Saturated Newton polytope) を満たす $\iff \text{New}(f) \cap \mathbf{Z}_{\geq 0}^k = \text{supp } f$.

Schur 多項式は SNP を満たすことがわかって
いる。

ss_λ についてはどうか？

…これは形式的ベキ級数なので、多項式ではない。た
だし、斉次な部分を取りだせば多項式になっているの
で、そこに関して SNP の議論はきちんと意味をもつ。

n を $n \geq |\lambda|$, $n - |\lambda|$ が偶数、を満たす整数、

$ss_{\lambda,n}(x) = ss_{\lambda}(x)$ の次数が n の部分

とする。

定理 (K.-松村-杉本)

$ss_{\lambda,n}$ も SNP を持つ。

証明のアイディア：分割の支配順序と Schur 関数の和に関するある補題を用いる。

1 インTRODクシヨN

2 King 盤

3 主定理

4 展望

展望

- SSOT の数え上げ。特に、Gessel の準対称関数との関係を調べる。
- $sp(2k)$ -表現論的なタイプ C RSK の解釈 (Heo-Kwon 2022 が Howe 双対性で似たようなことを証明)
- sp_λ は SNP ?

ありがとうございました。

- Kobayashi-Matsumura, **RSK correspondence for King tableaux with Berele insertion**,
arXiv 2506.06951.