

ゼータ 11

$\sin^{-1} x$ を用いた $\zeta(2)$ の計算

連続講義第 12 回
小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2021 年 9 月 6 日

キーワード

- ゼータ関数
- バーゼル問題
- 逆正弦関数
- ベキ級数
- ウォリス積分

リーマンのゼータ関数

自然数 $s \geq 2$ に対して、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

と定める。

最も計算が簡単なのは、

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

バーゼル問題 (オイラー、1735)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

いろいろな計算法がある。

- フーリエ級数
- $\sin x$ のマクローリン級数
- $\cot x$ のマクローリン級数
- 積分を使う
- $\sin^{-1} x$ を使う方法

アイディア：複雑なものは分けて考える

$\zeta(2)$ を奇数部分と偶数部分の 2 つに分けて計算する。

$$\zeta(2) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}_A + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}}_B$$

この両方が、似たような方法で計算できるというのがポイント。

定理

$$A = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$B = \frac{\pi^2}{24}.$$

したがって、

$$\zeta(2) = A + B = \frac{\pi^2}{6}.$$

この証明のために、いろいろと用語を準備していく。

- $\sin^{-1} x$
- ベキ級数
- ウォリス数
- ウォリス積分

逆正弦関数

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

特に、 $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ のとき、

$$\sin^{-1}(\sin y) = y.$$

ベキ級数とは

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \in \mathbf{R}$$

の形の関数。

テイラーの定理

無限回微分可能な関数は、原点の近くでベキ級数で表せる。例えば、

$$\sin x, e^x, \log(1+x), \sin^{-1} x, \sqrt{1+x}, \frac{1}{1-x}$$

などはすべて

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のように表せる。

記号

$n \geq 0$ に対して、

$$w_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1},$$

$$w_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}$$

とおく。

これらを仮に**ウォリス数**と呼ぶことにしよう。

$$w_0 = 1, w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2},$$

$$w_3 = \frac{2}{3\cdot 1} = \frac{2}{3}, w_4 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{3}{8}, \cdots$$

特に、

$$\begin{aligned}w_{2n}w_{2n+1} &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} \\ &= \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。この結果は、あとで使う。

補題

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_{2n}} \frac{x^{2n}}{(2n)^2}$$

アイディア：各係数にそれぞれ w_{2n+1} , w_{2n} をかけて、さらに $x = 1$ とすると

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

が現れる。ではどうやってこの変形をする？

項別積分

ベキ級数は項別に積分することができる。(その結果も同じ範囲で定義されたベキ級数になる)

$$\int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_c^d x^n dx \right)$$

とても便利な計算法。これを $\sin^{-1} x$ に適用すると何が起きる？ ウォリス積分が登場する。

補題：ウォリス積分

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

とおくと、

$$I_{2n} = w_{2n} \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = w_{2n+1}.$$

証明

まず、 $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ である。

次に $n \geq 2$ として、 I_n と I_{n-2} の間の漸化式を導く。

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} (-\cos x)' \sin^{n-1} x \, dx \\ &= \underbrace{[(-\cos x) \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2}}_0 - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

$$\text{つまり } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

初期値を考慮して漸化式を解くと、

$$I_{2n} = w_{2n} \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = w_{2n+1}. \blacksquare$$

ウォリス積分

$f(x)$ をベキ級数とする。

$$W(f(x)) = \int_0^{\pi/2} f(x \sin \theta) d\theta$$

と定める。

補題

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする。

$$Wf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(\frac{\pi}{2} w_{2n} \right) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} w_{2n+1} x^{2n+1}.$$

証明.

$$\begin{aligned} Wf(x) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sin^n \theta d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\int_0^1 \sin^n \theta d\theta \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(\frac{\pi}{2} w_{2n} \right) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} w_{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

定理の証明

$$\begin{aligned} W(\sin^{-1} x)|_{x=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n} \mathbf{w}_{2n+1} \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\left(\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right)|_{x=1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_{2n}} \frac{\pi}{2} \mathbf{w}_{2n} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi}{2} B \end{aligned}$$

一方、

$$A = W(\sin^{-1} x)|_{x=1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{-1}(x \sin \theta) d\theta|_{x=1}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \theta d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{\pi}{2} B = W\left(\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right)|_{x=1}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\sin^{-1}(x \sin \theta))^2 d\theta|_{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta = \left[\frac{\theta^3}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48},$$

$$B = \frac{\pi^2}{24}$$

なので、定理が証明できた。

数学の理想

1 つ 1 つのケースを別々に扱うのではなく、なるべくまとめて議論する方がよい。

そのためには、なるべく発想を広げることが必要。

- 視点 どこを見るか
- 視野 どこまで見るか
- 視座 どこから見るか

自分の盲点にも気づけると、より可能性が出て来る。

盲点の性質

小さすぎるものは見えないが（物理的）、大きすぎるものはもっと見えない（認知的）

ヒトの脳の性質：カラーバス

脳は、興味のある情報をキャッチしやすい

数学の研究

まず、予想を立ててから、計算を行い、結果にたどり着くことが多い。

特に、新しい結果が出ることを、**発明**と言わず、**発見**という。

発見 = discover = 覆いをはがす

小平邦彦先生のエッセイ：優れた仏像彫刻師は、木に仏像を彫っていくのではなく、あらかじめ木に埋まっている仏像を取り出して来る。

研究のアレンジ

ある結果が出たら、何かその類似が成り立つことが多い。では、どうやってマイナーチェンジすればいいのか？

オズボーンのチェックリスト

アイデアを

- 転用できないか？
- 応用？
- 変更？
- 拡大？
- 縮小？
- 代用？
- 置換？
- 逆転？
- 結合？

- 転用： $\tan^{-1} x$, $(\tan^{-1} x)^2$ で同様のことを考える。
- 拡大： $(\sin^{-1} x)^3$, $(\sin^{-1} x)^4$ で同様のことをやる。
- 応用： $\frac{\sin^{-1} x}{x}$, $\frac{(\sin^{-1} x)^2}{x}$ を使うと、全く並行に $\zeta(3)$ の議論ができる。
- 逆転： $\sin^{-1} x$ の代わりに $\cos^{-1} x$ を考える。

ありがとうございました。

参考文献

- <https://ja.wikipedia.org/wiki/リーマンゼータ関数>
- <https://ja.wikipedia.org/wiki/バーゼル問題>