

ゲーデルプリンター、命題、証明可能性 集合論シリーズ第4回

小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2022 年 5 月 2 日

概要

ゲーデルプリンター、命題、証明可能性を通じて**論理学と数学の境界**の話をします。

次のような仮想的な機械を考えてみましょう。

ゲーデルプリンターは、「正しい文のみを印字する」機械です。
このプリンターは、当然次の文を印字します。

- **奇数の平方は奇数**
- **素数は無限に存在する**

しかし、どうしても印字できない文もあります。それは…この機械自身に言及している文です。

- **ゲーデルプリンターは、この文を印字しない。**

もし機械がこの文を印字したら、矛盾が起きてしまいます。しかし、この文の主張が正しいことには変わりありません。ある文が正しいことと、印字可能であることにはいくらかギャップがあるわけです。(印字可能 $\implies$ 正しいは成り立つが、正しい $\implies$ 印字可能は成り立たない)

ゲーデルプリンター→数学（神、専門家、集合知）

正しい→真の数学的主張

印字可能→証明可能

と読みかえると、新たなパラダイムに出逢います。

証明はできないけど、真である文が存在する（数学の公理はその例）

命題とは、**真**か**偽**かをきちんと決められる文のことをいいます。
次の文を見てみましょう。

- 奇数の平方は奇数である。
- x を実数とする。 $x^2 = 25$ ならば、 $x = 5$ である。
- 素数は無限に存在する。
- 4 で割って 1 余る素数は無限に存在する。
- グロタンディーク宇宙が存在する。
- $\aleph_0 < |A| < \aleph_1$ を満たす集合 A は存在しない。(連続体仮説)

命題が真であることを主張する論拠を**証明**といいます。また、命題が偽であることを主張する論拠を**反証**といいます。

命題（真）

奇数の平方は奇数である。

証明：奇数を $2n - 1$ (n は自然数) と表そう。すると、その平方は

$$(2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2 \times 2(n^2 - n) + 1$$

と表せるので、やはり奇数である。 ■

命題（偽）

x を実数とする。 $x^2 = 25$ ならば、 $x = 5$ である。

反証：反例として、 $x = -5$ がある。

命題（真）

素数は無限に存在する。

証明：素数を有限個であると仮定し、それらを記号 $p_1, \dots, p_n$ で表そう。ここで

$$P = p_1 \cdots p_n + 1$$

を考えると、 P は素数 $p_1, \dots, p_n$ のいずれでも割り切れないので、 P 自身も素数、つまりある k が存在して $P = p_k$ である。しかし、すべての k に対して $P > p_k$ であるから矛盾。 ■

この証明はいくらかわかりやすいでしょう。

では、次はどうか？

命題

4 で割ると 1 余る素数は、無限に存在する。

これも真と証明されています。(ディリクレの算術定理) しかし、その証明を理解するには、かなりの専門知識が必要です。

私には証明はわからないけど、**神**（数学、専門家、集合知）は真だと知っているということです。ただ、この命題が**真か偽かのどちらかである**であることは、**私**でも疑いがないはずです。（実際そうです）これを**真偽の決定可能性**といいます。

少しまとめると…

- 真である命題で、私にも（神にも）その証明がわかるもの
- 真である命題で、私には証明はわからないけど、神ならわかるもの。ただ、私にも真偽の決定可能性はわかるもの

があります。ならば、

- ある文で、私にはそもそも真偽の決定可能性すらわからないもの

も存在するかもしれません。

次の公理を満たす集合 U を**グロタンディーク宇宙**という。

- $x \in X, X \in U \implies x \in U$.
- $X, Y \in U \implies \{X, Y\} \in U$.
- $X \in U \implies \mathcal{P}(X) \in U$.
- $A_\alpha \in U, \alpha \in U, I \in U \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in U$.

イメージ： U はとてつもなく大きな集合です。(すべての集合を含む集合を意図して構成された)

文

空でないグロタンディーク宇宙が存在する。

これも存在するかしないかのどちらかであるような気がしますが、**そうでないこともありうる**というのが今日の議論の核心です。より詳しくは、考える公理系によって、上の文は真命題になりえます。

文（連続体仮説）

$\aleph_0 < |A| < \aleph_1$ を満たす集合 A は存在しない。

この文も、考える公理系によって、決定不可能な文、真命題、偽命題になりえます。ということは、

命題（真）

4 で割って 1 余る素数は無限に存在する。

とは根本的に性質の異なる文ということです。連続体仮説を決定するよりも、少ない公理を仮定するだけで済むということです。

数学では、暗黙のうちにさまざまな集合論の公理を仮定して、議論を進めています。では、どんな公理があるのでしょうか？

有名なのはペアノの公理。自然数の存在を保証したものです。

ペアノの公理：自然数とは、記号 0 ，関係 $=$ ，演算 $x \mapsto x + 1$ ， $(x, y) \mapsto xy$ を備えた集合で、すべての数 x, y, z と命題関数 $P(x)$ について次の公理を満たすもの。

- $x = x$
- $x = y \implies y = x$
- $x = y, y = z \implies x = z$
- $0 = x + 1$ となる x は存在しない。
- $x + 1 = y + 1 \implies x = y$.
- $x + 0 = x$
- $x + (y + 1) = (x + y) + 1$
- $x0 = 0$
- $x(y + 1) = xy + x$
- $P(0) \wedge \forall x(P(x) \implies P(x + 1)) \implies \forall xP(x)$

他の公理

- ツェルメロ・フランクелの公理
- 選択公理
- 整列可能定理

「ものごとの存在性」というのは、かなり微妙な話で歴史的に

- 哲学
- 仏教
- 物理
- 論理学
- 数学

などで盛んに議論されてきました。

シュレーディンガーの猫
箱の中に猫を入れ、ガスを充満させる。
箱を開けなければ、中が見えないので、猫が生きているか死んでいるかは五分五分である。つまり、

「猫は確率的に半分生きていて、半分死んでいる状態」

猫の生死でなく、素粒子の位置を観測すると考えたら？

- ニュートン力学的な世界観（ユニバース）
素粒子の位置や速度は、微分や積分によってすべて計算可能。決定論的（ラプラスの悪魔）。すべての数学的主張は、真か偽のどちらか。数学宇宙も 1 つ。
- 量子力学的な世界観（マルチバース）
素粒子の位置や速度は、（技術的な問題をクリアしたとしても）どうしても正確には計算できない。非決定論的、複雑系。すべての数学的主張は、真か偽のどちらかに決まるとは限らない。数学宇宙はたくさんあり、我々はその一部を知っているだけ。

直観主義（ブラウアー）：数学的真理とはヒトの精神の産物。数学は、根本的には脳、論理、言語などで生み出しているもの。

形式主義（ヒルベルト）：ヒトの精神とは独立に（脳の外部に）数学的真理が実在する。公理から構成される記号のゲーム。

まとめ

- 命題とは真偽の決まる文のことである。
- ゲーデルプリンターは、真命題と証明可能な命題のギャップを表している。
- 一見、命題に見えてそうでない文もある。ある公理を追加すると命題になることがある。このような現象を認めると、数学をもっと広い視野からとらえることができる。

ありがとうございました。

参考文献

スマリヤン「不完全性定理」丸善

スマリヤン「ゲーデルパズル」日本評論社

Wikipedia:

ペアノの公理、連続体仮説、ゲーデルの不完全性定理、グロタンディーク宇宙