

Gessel の基本的準対称関数の定理の拡張

小林雅人*

神奈川大学工学部

masato210@gmail.com

組合せ論サマースクール 2025 (大分) 予稿

2025 年 8 月 2 日

1 Schur 関数に関する Gessel の定理

Young 図形の代数的組合せ理論には実に豊富なトピックがある。特に、中心的な役割を担うのが半標準盤の話である。詳しくは Fulton の著書 [1] に譲るとして、ここでは Schur 関数に関する Gessel の定理の概略を紹介しよう。今、無限個の変数

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$$

を用意し、分割 λ に対して Schur 関数

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_T \mathbf{x}^T$$

を考える。 T は形が λ の半標準盤、 $\mathbf{x}^T$ はその重みで、単項式 $\prod_i x_i^{\text{wt}_i(T)}$ ($\text{wt}_i(T)$ は T の中の i の個数) である。これは形式的べき級数なので収束は考えないが、有限変数の Schur 多項式と区別するというニュアンスで「関数」という用語を使う。

1984 年に、Gessel は対称関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ の基本的準対称関数への分解を示した。いくつか用語を準備しよう。

定義 1.1. $a = (a_1, \dots, a_m)$ を自然数の列とする。 a に対する**単項的準対称関数**とは、

$$M_a(x) = \sum x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_m}^{a_m}$$

*松村朝雄、杉本将吾 (国際基督教大学) との共同研究

である。ただし、和は $i_1 < \dots < i_m$ となるすべての自然数の組 $(i_1, \dots, i_m)$ にわたってとる。

例えば、

$$M_{(7,4)}(\mathbf{x}) = x_1^7 x_2^4 + x_1^7 x_3^4 + \dots + x_2^7 x_3^4 + x_2^7 x_4^4 + \dots$$

である。無限変数の無限和という壮大なものであることが見てとれる。

次に、 $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ ($m \leq n$) を自然数列とする。 b が a の**分解**であるとは、ある $i_1, \dots, i_m, i_{m+1}$ が存在して $1 = i_1 < \dots < i_m < i_{m+1} = n + 1$,

$$a_j = b_{i_j} + \dots + b_{i_{j+1}-1}$$

が各 $j = 1, \dots, m$ について成り立つことをいう。

例えば $a = (7, 4)$ であれば、 $(6, 1, 4)$, $(1, 6, 4)$, $(7, 1, 3)$, $(2, 5, 2, 1, 1)$ などはずべて a の分解である。記号 $\text{ref}(a)$ で a の分解の集合を表す。

定義 1.2. 自然数列 a に対する Gessel の**基本的準対称関数**とは、

$$F_a(\mathbf{x}) = \sum_{b \in \text{ref}(a)} M_b(\mathbf{x})$$

である。

形が λ の半標準盤 T が**標準的**とは、自然数 $1, 2, \dots, |\lambda|$ (T の箱の個数) がちょうど1度ずつ T に現れることをいう。標準盤を、左から連続する自然数を含む水平帯 $(H_1, \dots, H_d)$ (H_i の数字はどれも H_{i+1} の数字よりほんとうに小さい) に分解したとき、数列 $(|H_1|, \dots, |H_d|)$ を T の降下列といい、 $\text{des } T$ で表す。

例えば $T =$

1	2	5	7
3	4		
6			

 であれば、

1	2	*	*
*	*		
*			

*	*	5	*
3	4		
*			

*	*	*	7
*	*		
6			

がそのような分解なので、 $\text{des } T = (2, 3, 2)$.

定理 1.3 (Gessel).

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \text{ST}(\lambda)} F_{\text{des } T}(\mathbf{x}).$$

ここで、 $\text{ST}(\lambda)$ は形が λ の標準的な盤全体の集合。

証明は、上のような水平帯による分解を用いて同値関係を定義し、その同値類ごとの生成関数が $F_{\text{des } T}(\mathbf{x})$ になるというものである。

2 主定理

我々の主定理は、上のような分解が半標準振動盤というクラスの盤の生成関数についても成り立つことを主張する。その際に、標準的振動盤とその降下列を用いるのは全く同様である。(半標準振動盤、標準振動盤の定義はやや技術的なのでここでは述べない。[3] を見て欲しい)

参考文献

- [1] W. Fulton, Young tableaux, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [2] Ira M. Gessel. Multipartite P -partitions and inner products of skew Schur functions, Contemporary Mathematics 34, 1984, 289-317.
- [3] M. Kobayashi-K. Matsumura, RSK correspondence for King tableaux with Berele insertion, arXiv 2506.06951.
- [4] M. Kobayashi-K. Matsumura-S. Sugimoto, Generating function of semistandard oscillating tableaux, in preparation.