

過剰指数と過剰数、完全数、不足数

小林雅人

神奈川大学 & 一橋大学

2022 年 6 月 6 日

概要

過剰指数というアイデアを用いて、過剰数、完全数、不足数の詳細を紹介します。

以下、 d, m, n, N などは自然数を表す。

$n = dm$ となる d, m が存在するとき、 d は n の約数であるといい、記号 $d|n$ で表す。

約数関数

自然数 n に対して、

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

とする。

6 の約数は 1, 2, 3, 6 なので

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

28 の約数は 1, 2, 4, 7, 14, 28 なので

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	...

$\{\sigma(n)\}$ は不規則に見えるが...

何か関係式を満たす？

例えば、

$$\sigma(6) = \sigma(2)\sigma(3).$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	...

$$\sigma(10) = \sigma(2)\sigma(5).$$

σ の乗法性

$\gcd(m, n) = 1$ のとき

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

過剰指数

$$I(n) = \sigma(n) - 2n.$$

$I(n) > 0$ のとき n を過剰数、 $I(n) = 0$ のとき n を完全数、 $I(n) < 0$ のとき n を不足数という。

この分類は、紀元前 100 年ころからあるようである。完全数の研究も長く、ユークリッド、フェルマー、デカルト、メルセンヌ、ルジャンドル、オイラーなどが行った。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$I(n)$	-1	-1	-2	-1	-4	0	-6	-1	-5	-2	-10	4

- 不足数 1, 2, 3, 4, 5, 7, ...
- 完全数 6, 28, 496, 8128, ...
- 過剰数 12, 18, 20, 24, 30, ...

数列 $\{I(n)\}$ もかなり不規則に見える（が実はいろいろな性質や関係式が存在する）。

斎藤くんが $I(n)$ ($1 \leq n \leq 100000$) の表を作ってくれました。ありがとう！

$I(n)$ は、「 n が因子をどれくらい豊富に持つか」を表しているといえる。特に、ある程度「隣接」した因子をもつと $I(n)$ は大きくなりやすい。(ここは数学的にもっと厳密に調べたい)

n	$I(n)$
$2^3 3$	$12 > 0$
$2^3 5$	$10 > 0$
$2^3 7$	$8 > 0$
$2^3 11$	$4 > 0$
$2^3 13$	$2 > 0$
$2^3 17$	$-32 < 0$

全自然数の約 24.7%が完全数または過剰数。(Deléglise 1997)

事実

- 過剰数は無限に存在する。
→ 12 の倍数を考えればよい
- 不足数も無限に存在する。
→ 素数列を考えればよい。
- 完全数が無限に存在するかは未解決。

事実

- 奇数の不足数は存在する。
→ 1 がそう。
- 奇数の過剰数も存在する。
→ 最小は 945
- 奇数の完全数が存在するかは未解決。

$\sigma(n)$ は乗法性を満たすのであった。では、

研究課題

乗法に関して、 $I(n)$ はどんな性質を持つか？

定理

過剰数の倍数は過剰数である。つまり、

$$I(n) > 0 \implies I(mn) > 0.$$

証明： $I(n) > 0$ とする。素数 p を考え、 $I(pn) > 0$ を示せばよい。

- $\gcd(p, n) = 1$ のとき

$\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n)$ であるから、

$$\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n) = (p+1)\sigma(n) > p\sigma(n),$$

$$I(pn) = \sigma(pn) - 2pn > p\sigma(n) - 2pn > 0.$$

- $\gcd(p, n) \neq 1$ のとき

$$p\sigma(n) = p \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} pd = \sum_{d'|pn, p|d'} d' < \sum_{d'|pn} d' = \sigma(pn)$$

よって、

$$I(pn) = \sigma(pn) - 2pn > p\sigma(n) - 2pn > 0. \blacksquare$$

系

完全数の自明でない倍数は、過剰数である。つまり、

$$I(n) = 0, m \geq 2 \implies I(mn) > 0.$$

系

完全数の真の約数は、不足数である。つまり、

$$I(n) = 0, d|n, d \neq n \implies I(d) < 0.$$

$I(n)$ に関して、不足数と過剰数は対称に振る舞うわけではない。つまり、 $I(n) < 0$ かつ $I(mn) \geq 0$ となることはありうる。実際、

$$I(14) < 0,$$

$$I(28) = 0,$$

$$I(56) > 0.$$

定理

n が 3 以上の奇数ならば、ある m が存在して

$$I(2^m n) > 0.$$

証明.

$$I(2^m n) = \sigma(2^m n) - 2 \cdot 2^m n$$

$$= (2^{m+1} - 1)\sigma(n) - 2^{m+1}n = 2^{m+1}(\sigma(n) - n) - \sigma(n).$$

この式は m を十分大きくとると > 0 にできる。 □

系

N が偶数、かつ N が 2 のべきでなければ、ある m が存在して

$$I(N^m) > 0.$$

証明.

$N = 2^e n$, ($e \geq 1$, n は 3 以上の奇数) と表そう。前定理から、 $I(2^m n) > 0$ となる m が存在する。

$$N^m = 2^{em} n^m = (2^{em-1} n^{m-1}) 2^m n$$

は過剰数 $2^m n$ の倍数であるから、

$$I(N^m) > 0.$$



系

N が完全数ならば、 N は過剰数の倍数ではない。

$I(N) = 0$ かつ $N = mn$, $m \geq 2$, $I(n) > 0$ ならば定理より

$$I(N) = I(mn) > 0$$

である。これは矛盾。

こう考えると、より本質的な過剰数を見極めることが重要だ。

定義

n が**原始過剰数**であるとは、 n が過剰数であり、しかも過剰数の倍数にはなっていないもの、つまり

$$I(n) > 0,$$

$$d|n, d \neq n \implies I(d) \leq 0$$

を満たすことをいう。

原始過剰数でない過剰数を合成過剰数と呼ぶことにしよう。

原始過剰数の例：12, 18, 20, 945

合成過剰数の例：24, 36, 40.

問題

原始過剰数の因子はどんな形をしている？

斎藤くんの表 ($I(n)$, $1 \leq n \leq 100000$) からある程度は予想できるのでは？

次のアイデア：

$$I(n) = \sigma(n) - 2n$$

は加法を含んでいるので、乗法的な関係式よりも**加法的**な関係式を見つけたい。

三角数、四角数、五角数

$$t_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$s_k = k^2$$

$$e_k = \frac{k(3k-1)}{2} (k \in \mathbf{Z})$$

k	1	2	3	4	5	...
t_k	1	3	6	10	15	...
s_k	1	4	9	16	25	...
e_k	1	5	12	22	35	...
e_{-k}	2	7	15	26	40	...

6 は三角数 t_3 , 28 は三角数 t_7 . 36 は三角数 t_8 でもあり、四角数 s_6 でもある。

15 は三角数 t_5 でもあり、五角数 e_{-3} でもある。

定理

偶数の完全数は三角数である。

証明

ユークリッド・オイラーの定理から、

$n = 2^e(2^{e+1} - 1)$, $2^{e+1} - 1$ は素数と書ける。 $k = 2^{e+1} - 1$ とおくと、

$$n = \frac{2^{e+1}}{2}(2^{e+1} - 1) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

考察

偶数の完全数 n は、五角数と三角数の和である。より詳しくは、ある k が存在して

$$n = t_k + e_{k+1}.$$

例えば、

$$496 = 120 + 376 = t_{15} + e_{16},$$

$$8192 = 2016 + 6112 = t_{63} + e_{64}.$$

整数 n の五角数符号を

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} (-1)^m & n = e_m \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定める。

$$E = \{e_m \mid m = \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

を五角数全体の集合とする。さらに、

$$E(n) = \{e \in E \mid e < n\}$$

とおく。

約数関数の五角数漸化式（オイラー）

$$\sigma(n) = - \sum_{e \in E(n)} \varepsilon(e) \sigma(n - e) - \varepsilon(n)n$$

（赤字部分は、先日、配ったスライドからの訂正）

計算例

$\sigma(6)$ は $\{\sigma(5), \sigma(4), \sigma(1)\}$ から計算できる。

$$\sigma(6) = \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1) = \textcolor{red}{6} + \textcolor{red}{7} - \textcolor{red}{1} = \textcolor{blue}{12}$$

n	1	2	3	4	5	6
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12

したがって、乗法性と併せて考えると、

$$\sigma(1) + \sigma(2)\sigma(3) = \sigma(4) + \sigma(5)$$

が成り立つ。

$\sigma(7)$ は $\{\sigma(6), \sigma(5), \sigma(2), \text{"}\sigma(0)\text{"}\}$ で計算できる。

計算例

$$\begin{aligned}\sigma(7) &= \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - \underbrace{\text{"}\sigma(0)\text{"}}_7 \\ &= \mathbf{12} + \mathbf{6} - \mathbf{3} - \mathbf{7} \\ &= \mathbf{8}.\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(n)$	"7"	1	3	4	7	6	12	8

これらの式を $I(n)$ にまで拡張するのはすぐできる。それはまた次回。

ありがとうございました。

参考文献

Wikipedia 完全数、過剰数、不足数

斎藤くんの表、

Deléglise, Bounds for the density of abundant integers

Laatsch, measuring the abundancy of integers