

約数関数、分割数、五角数の漸化式

小林雅人

神奈川、一橋、東京都市、東京工業、千葉工業大学

2022 年 5 月 21 日
市民の数学研究会

目次

今日の話

約数関数と分割数の両方が満たす五角数漸化式の紹介

キーワード

- 約数関数
- 分割数
- 五角数
- 五角数漸化式

約数関数

自然数 n に対して、

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

とする。

6 の約数は 1, 2, 3, 6 なので

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

28 の約数は 1, 2, 4, 7, 14, 28 なので

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	...

$\{\sigma(n)\}$ は不規則に見えるが...

何か関係式を満たす？

例えば、

$$\sigma(6) = \sigma(2)\sigma(3).$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	...

$$\sigma(10) = \sigma(2)\sigma(5).$$

乗法的関数

$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ とする。 $\gcd(m, n) = 1$ のとき

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

を満たす関数 f を**乗法的**と呼ぶ。

σ は乗法的である。すなわち、

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

を相異なる素数への素因数分解とすると

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{m_1}) \cdots \sigma(p_k^{m_k})$$

が成り立つ。乗法的な関係式はわかりやすい。

分割

自然数 n の**分割**とは、 n を他の正の自然数の和に分けることである。例えば、

$$23 = 7 + 5 + 4 + 4 + 2 + 1 \quad \text{がある。}$$

分割数

$p(n)$ で非負整数 n の分割の個数を表す。ただし、 $p(0) = 1$ と約束する。

例えば、

$$1 : 1$$

$$2 : 2 = 1 + 1,$$

$$3 : 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1,$$

$$4 : 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$\begin{aligned} 5 : 5 &= 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \end{aligned}$$

より $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7$ など。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	...

$\{p(n)\}$ も不規則に見える。特に、全く乗法的ではない。

何か関係式を満たすだろうか？

この議論には、 $\{p(n)\}$ をまとめて扱うのが便利。

q を変数とし、形式的ベキ級数

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$$

を考える。

$$P(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \cdots$$

無限積による表示

$$P(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}.$$

簡単な証明：右辺を書き下すと、

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = (1+q+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)\cdots$$

のようになる。展開すると

$$q^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$$

のような項が次々に現れる。これらをサイズ $|\lambda|$ によって整理すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

の形になる。よく考えると、

$$(1+q+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)\cdots$$

から n のどんな分割も必ず 1 回出て来て、しかも 1 回しか出てこない。つまり、 $a_n = p(n)$ である。 □

五角数

五角数とは、 $e_m = \frac{1}{2}m(3m - 1)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
の形に表される非負整数のことである。

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
e_m	0	1	5	12	22	35	51	70	92	...
e_{-m}	0	2	7	15	26	40	57	77	100	...

名前の由来：

同じ長さの棒で、辺の長さが 1 単位ずつ大きくなる正五角形の増加列を m 個作ったとき、必要な棒の総数が

$$e_m = \frac{1}{2}m(3m - 1)$$

に等しい。

→ e_m と $p(n)$ の関係は？

$$P(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \text{ の逆数を考える。}$$

$$P(q)^{-1} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \right)^{-1}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots$$

ために、

$$(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)$$

を展開してみると

$$1 - \textcolor{red}{q}^3 - q^2 + q^5 - q + q^4 + \textcolor{red}{q}^3 - q^6$$

のように、打ち消し合う項が出て来る。

$n \rightarrow \infty$ としたときに消える項と消えない項は？

オイラーの五角数定理

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{e_m}.$$

要するに、左辺を展開すると、五角数のベキだけが生き残り、その係数は ± 1 。

証明の概略：

$$P(q)^{-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{e_m}$$

の両辺に $P(q)$ をかけて

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{e_m} \right)$$

と書き直し両辺の q^N の係数を比べると、分割数と五角数の関係が導ける。

分割数の五角数漸化式（オイラー）

$$p(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} (p(n - e_m) + p(n - e_{-m})) .$$

ただし、右辺に “ $p(0)$ ” が現れたら 1, $p(k)$, $k < 0$ が現れたら 0 と解釈する。

主定理：次の2つの等式が成り立つ。

分割数の五角数漸化式（オイラー）

$$p(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} (p(n - e_m) + p(n - e_{-m})) .$$

ただし、右辺に “ $p(0)$ ” が現れたら 1, $p(k)$, $k < 0$ が現れたら 0 と解釈する。

約数関数の五角数漸化式（誰？）

$$\sigma(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} (\sigma(n - e_m) + \sigma(n - e_{-m})) .$$

ただし、右辺に “ $\sigma(0)$ ” が現れたら n , $\sigma(k)$, $k < 0$ が現れたら 0 と解釈する。

証明には、

- 算術関数
- ディリクレ積
- ランベルト級数

などの議論が必要。ここでは詳細は省略。

計算例

$p(6)$ は $\{p(5), p(4), p(1)\}$ で計算できる。

$$\begin{aligned} p(6) &= p(6-1) + p(6-2) - p(6-5) \\ &= p(5) + p(4) - p(1) = \mathbf{7} + \mathbf{5} - \mathbf{1} = \mathbf{11} \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11

計算例

$\sigma(6)$ は $\{\sigma(5), \sigma(4), \sigma(1)\}$ から計算できる。

$$\sigma(6) = \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1) = \textcolor{red}{6} + \textcolor{red}{7} - \textcolor{red}{1} = \textcolor{blue}{12}$$

n	1	2	3	4	5	6
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12

$p(7)$ は $\{p(6), p(5), p(2), p(0)\}$ で計算できる。

計算例

$$\begin{aligned} p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) \\ &= \mathbf{11} + \mathbf{7} - \mathbf{2} - \mathbf{1} \\ &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15

$\sigma(7)$ は $\{\sigma(6), \sigma(5), \sigma(2), \text{"}\sigma(0)\text{"}\}$ で計算できる。

計算例

$$\begin{aligned}\sigma(7) &= \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - \underbrace{\text{"}\sigma(0)\text{"}}_7 \\ &= \textcolor{red}{12} + \textcolor{red}{6} - \textcolor{red}{3} - \textcolor{red}{7} \\ &= \textcolor{blue}{8}.\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(n)$	"7"	1	3	4	7	6	12	8

おまけ：混合漸化式

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma(k)p(n-k)$$

ために $p(7) = \mathbf{15}$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7}(\sigma(1)p(6) + \sigma(2)p(5) + \sigma(3)p(4) + \sigma(4)p(3) + \sigma(5)p(2) + \sigma(6)p(1) + \sigma(7)p(0)) \\ &= \frac{1}{7}(11 + 21 + 20 + 21 + 12 + 12 + 8) = \mathbf{15}. \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(n)$	—	1	3	4	7	6	12	8
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15

まとめ

- 約数関数、分割数は一見不規則に見える自然数列である。
- 実際は、約数関数は乗法的である。分割数については、乗法的ですらない。
- しかし、約数関数も分割数も五角数による似たような漸化式を満たし、加法的に計算できる。

展望

- 約数関数にはベキ乗による一般化がある。

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$$

これについても何か言えないか？

- 「多角数」と呼ばれる一連の整数列がある。(五角数はその一例) 他の多角数で似たようなことが言えるか？

ありがとうございました。

参考文献

- 整数の分割、数学書房
- Thomas-Abdul-Tirupathi, Surprising Connections between Partitions and Divisors, The College Mathematics Journal 38, 2007.