

ゼータ 4 混合公式の証明 & オイラー・ゴールドバッハの定理とゼータ 交代和

連続講義第 5 回
小林雅人

神奈川大学 & 一橋大学

2021 年 2 月 1 日

今日の話

混合公式の証明（この前の補足）

オイラー・ゴールドバッハの定理の類似でゼータ交代和を計算

キーワード

- ゼータ関数
- L 関数
- オイラー・ゴールドバッハの定理
- 狭義の累乗数

ζ_{odd}, L 関数

$s \geq 2$ を満たす自然数 s に対して、

$$\zeta_{\text{odd}}(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots$$

と定める。

s	1	2	3	4	5	6	7	...
$\zeta_{odd}(s)$		$\frac{\pi^2}{8}$		$\frac{\pi^4}{96}$		$\frac{\pi^6}{960}$		...
$L(s)$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi^3}{32}$		$\frac{5\pi^5}{1536}$		$\frac{61\pi^7}{184320}$	...

L 関数には、算術的な「パートナー」が存在する。
以下のオメガ関数を使って表現する。

オメガ関数

自然数 n を素因数分解する：

$$n = 2^a p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k} q_1^{c_1} \cdots q_l^{c_l}.$$

ただし、 p_i は $4d + 1$, q_j は $4d + 3$ の形の素数。

$$\Omega_1(n) = b_1 + \cdots + b_k$$

$$\Omega_3(n) = c_1 + \cdots + c_l$$

例

$$n = 2^4 3^6 5^9 7^4$$

$$\Omega_1(n) = 9$$

$$\Omega_3(n) = 6 + 4 = 10$$

奇数の交代和

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$\text{奇数は2種類} \begin{cases} 4k + 1 \\ 4k + 3 \end{cases}$$

確認 (mod 3 で考えてみると)

- $4k + 1$ 型の奇数は $4d + 3$ 型の素因子を偶数個だけもつ。
- $4k + 3$ 型の奇数は $4d + 3$ 型の素因子を奇数個だけもつ。

オイラー積

$$L(s) = \prod_{p=4d+1} (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{p=4d+3} (1 + p^{-s})^{-1} = \sum_{n:\text{odd}} \frac{(-1)^{\Omega_{\mathbf{3}}(n)}}{n^s}$$

アイディア：一方だけでなく他方も考える。

$$\sum_{n:\text{odd}} \frac{(-1)^{\Omega_{\mathbf{1}}(n)}}{n^s} \text{の方は?}$$

定理 (ζ と L の混合公式)

$$\sum_{n:\text{odd}} \frac{(-1)^{\Omega_1(n)}}{n^s} = \frac{\zeta_{\text{odd}}(2s)}{L(s)}$$

混合公式の証明

発想はシンプルである。恒等式

$$1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$$

を

$$\frac{1 + x}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x},$$

$$\frac{1 - x}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x},$$

と2つの観点からとらえると…

$$\zeta_{\text{odd}}(2s) = \prod_{p=4d+1} (1 - p^{-2s})^{-1} \prod_{p=4d+3} (1 - p^{-2s})^{-1},$$

$$L(s) = \prod_{p=4d+1} (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{p=4d+3} (1 + p^{-s})^{-1}.$$

比をとると

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{\text{odd}}(2s)}{L(s)} &= \prod_{p=4d+1} \frac{(1 - p^{-2s})^{-1}}{(1 - p^{-s})^{-1}} \prod_{p=4d+3} \frac{(1 - p^{-2s})^{-1}}{(1 + p^{-s})^{-1}} \\ &= \prod_{p=4d+1} (1 + p^{-s})^{-1} \prod_{p=4d+3} (1 - p^{-s})^{-1} \\ &= \sum_{n:\text{odd}} \frac{(-1)^{\Omega_1(n)}}{n^s}. \quad \square \end{aligned}$$

後半：オイラー・ゴールドバッハの定理とゼータ交代和

ゼータ自然数値について

- $\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}.$
- $\zeta(3)$ は無理数 (アペリ 1979)
- $\{\zeta(2k+1)\}$ のうち、無限個は無理数

しかし、ゼータ個別の値 $\{\zeta(n)\}$ はわからなくても、様々な関係式が存在する。

$$\zeta(2) = 1.6449 \dots$$

$$\zeta(3) = 1.2020 \dots$$

$$\zeta(4) = 1.0823 \dots$$

$$\zeta(5) = 1.0369 \dots$$

確認

すべての $n \geq 2$ に対して $1 < \zeta(n) < 2$.

それぞれから 1 を引いてみると…

$$\zeta(2) - 1 = 0.6449 \dots$$

$$\zeta(3) - 1 = 0.2020 \dots$$

$$\zeta(4) - 1 = 0.0823 \dots$$

$$\zeta(5) - 1 = 0.0369 \dots$$

...

これらをすべて足すと？

定理 (Shallit-Zikan 1983)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = 1.$$

これは以下に述べる古典的なオイラー・ゴールドバッハの定理に似ている。

狭義の累乗数

自然数 N が**狭義の累乗数**であるとは、

$$N = m^n, \quad m, n \geq 2$$

と表せることをいう。

狭義の累乗数

4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, ...

そうでないもの

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, ...

オイラー・ゴールドバッハの定理 (1737 年ころ?)

$$\sum_{N:\text{狭義の累乗数}} \frac{1}{N-1} = 1.$$

すなわち、

$$\frac{1}{4-1} + \frac{1}{8-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \frac{1}{27-1} + \cdots = 1.$$

Shallit-Zikan (1983)

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} = 1.$$

こちらは（重複がある）狭義累乗数の逆数の和。よく見ると、左辺は

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) \text{ に等しい。}$$

証明.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} &= \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^n = \\ \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \right) &= \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = 1.\end{aligned}$$



なお、偶数バージョン：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}$$

奇数バージョン：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(2n + 1) - 1) = \frac{1}{4}$$

交代和バージョン：

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) = \frac{1}{2}$$

なども成り立つ。

応用：

定理（山形さんのゼータワンの結果の系）

自然数 $m \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (\zeta(2mk) - 1) = -1 + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m \pi \alpha^{2k-1} \cot(\pi \alpha^{2k-1}),$$

ただし、 $\alpha = \exp\left(\frac{\pi i}{2m}\right)$.

証明は、複素関数論の留数定理を用いる。

$$(\zeta(2)-1)-(\zeta(4)-1)+(\zeta(6)-1)-\dots = -1 + \frac{1}{2} \coth(\pi)$$

$$(\zeta(4)-1)-(\zeta(8)-1)+(\zeta(12)-1)-\dots =$$

$$-1 + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \left(\frac{\sin(\sqrt{2}\pi) + \sinh(\sqrt{2}\pi)}{\cosh(\sqrt{2}\pi) - \cos(\sqrt{2}\pi)} \right).$$

$$(\zeta(6)-1)-(\zeta(12)-1)+(\zeta(18)-1)-\dots$$

$$= -1 + \frac{\pi}{6} \left(\frac{\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi) + \sinh(\pi)}{\cosh(\pi) - \cos(\sqrt{3}\pi)} + \coth(\pi) \right)$$

展望

- 母関数

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) z^k$$

や

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (\zeta(2k) - 1) z^{2k}$$

の計算

- L 関数で似たようなことができるか？

ありがとうございました。