

ゼータ 5

ゼータ偶数&オイラーの公式、 ゼータ奇数&ラマヌジャンの公式

連続講義第 6 回
小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2021 年 3 月 1 日

キーワード

- ゼータ偶数
- オイラーの公式
- ゼータ奇数
- ラマヌジャンの公式

大きく関わった数学者

- オイラー (1707–1783)
- リーマン (1826–1866)
- ラマヌジャン (1887–1920)

リーマンのゼータ関数

$s \geq 2$ を満たす自然数 s に対して、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

と定める。さらに、 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ としておく。

$\zeta(s)$ の正確な値は何だろう？

Euler (1734 ~ 1736)

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}, \quad k \geq 1.$$

ただし、 B_{2k} はベルヌーイ数。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

⋮

数列 $\{\zeta(2m)\}_{m \geq 0}$ にはどんな特徴がある？

奇跡的に、これらはすべて三角関数に含まれている。

定理

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m} = -\frac{\pi z}{2} \cot(\pi z), \quad |z| < 1.$$

証明のアイディア：幾何級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$$

を用いる。

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{より、}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi z}{2} \cot(\pi z) &= -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 \left(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right)} \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k} \right) z^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} z^{2k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k}. \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{2^{2m}} = 0.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{3^{2m}} = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{4^{2m}} = -\frac{\pi}{8}.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{5^{2m}} = -\frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5-\sqrt{5}}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \pi \right).$$

証明
$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m} = -\frac{\pi z}{2} \cot(\pi z)$$

で $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ とすればよい。

ゼータ偶数値のたたみこみ

$m \geq 2$ のとき

$$\zeta(2m) = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=1}^{m-1} \zeta(2k)\zeta(2m-2k).$$

$$\begin{aligned}\zeta(8) &= \frac{2}{9} (\zeta(2)\zeta(6) + \zeta(4)\zeta(4) + \zeta(6)\zeta(2)) \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{\pi^2}{6} \frac{\pi^6}{945} + \frac{\pi^4}{90} \frac{\pi^4}{90} + \frac{\pi^6}{945} \frac{\pi^2}{6} \right) \\ &= \frac{\pi^8}{9450}.\end{aligned}$$

ちなみに

$$-\frac{\pi z}{2} \cot(\pi z) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m},$$

$$\frac{\pi z}{4} \sec \frac{\pi z}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} L(2m+1) z^{2m+1},$$

$$\frac{\pi z}{2} \csc(\pi z) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta(2m) z^{2m}.$$

ただし、

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots$$

$$\eta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots, \quad \eta(0) = \frac{1}{2}.$$

三角関数には、ゼータやその仲間がギッシリ詰まっている。

このように、ゼータ偶数値は関係式も含めてベルヌーイ数や $\cot$ で完全に記述できる。

では、ゼータ奇数値についてはどうか？

これもベルヌーイ数と $\cot$ が大きく関わっている。

しかし、状況はもっと複雑である。

ゼータ奇数値の表示 (一例)

Euler, Plouffe, Ramanujan

$$\zeta(3) = \frac{7}{180}\pi^3 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3(e^{2\pi m} - 1)}$$

$$\begin{aligned}\zeta(5) &= \frac{\pi^5}{294} - \frac{72}{35} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5(e^{2\pi m} - 1)} \\ &\quad - \frac{2}{35} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5(e^{2\pi m} + 1)}\end{aligned}$$

$$\zeta(7) = \frac{19}{56700}\pi^7 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^7(e^{2\pi m} - 1)}$$

これをよく見ると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2r+1}(e^{2m\alpha} - 1)}$$

の形の無限級数がたくさん登場している。

注：

$$\coth(m\alpha) = 1 + \frac{2}{e^{2m\alpha} - 1}$$

なので、cot でなく、coth が深く関わっている。ただ、これだけで話は終わらない。

べき乗約数関数 σ_r

実数 r に対して、

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r.$$

$$\sigma_{-3}(1) = 1^{-3} = 1$$

$$\sigma_{-3}(2) = 1^{-3} + 2^{-3} = \frac{9}{8}$$

$$\sigma_{-3}(3) = 1^{-3} + 3^{-3} = \frac{28}{27}$$

「 $\zeta(3)$ の一部」

事実

実は、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2r+1}(e^{2\alpha m} - 1)}$$

は、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{-(2r+1)}(m) e^{-2\alpha m}$$

と表せる。(ランバート級数、詳細はまたあとで)

これで $\zeta(2r+1)$, $\sigma_{-(2r+1)}$, $\cot$, $\coth$ がつながってきた。
ラマヌジャンがさらにこの関係を明らかにした。

ラマヌジャンの公式 (失われた遺稿)

α, β を正の実数で $\alpha\beta = \pi^2$ を満たすとする。このとき、各自然数 r について次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & (4\alpha)^{-r} \left(\frac{1}{2}\zeta(2r+1) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2r+1}(e^{2m\alpha} - 1)} \right) \\ & - (-4\beta)^{-r} \left(\frac{1}{2}\zeta(2r+1) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2r+1}(e^{2m\beta} - 1)} \right) \\ & = - \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2r+2-2k}}{(2r+2-2k)!} \alpha^{r+1-k} \beta^k \end{aligned}$$

α, β が両方登場することをこの式は**モジュラー性**をもつと言います。右辺は**ラマヌジャン多項式**と呼ばれている。

ラマヌジャン (1887-1920) 失われた遺稿

ラマヌジャンが生前に書き残した手記。(138 ページ) 言葉はほとんどなく、数式の羅列。

1976 年

George Andrews がケンブリッジトリニティ・カレッジの図書館で発見。55 年ほどここに眠っていた。

書かれていた数式の証明は 1976-2021 でほとんど済んだが、ラマヌジャンの思考の解読はまだ終わっていない。

古今東西の研究者がラマヌジャンの公式に繰り返し証明を与えてきた。(1890's ~ 1970's)

- *Grosswald*
- *Guinand*
- *Chowla*
- *Hardy*
- *Watson*

この一般化もある。

- *Berndt*
- *Katayama*
- *Katsurada*
- *Komori-Matsumoto-Tsumura*

証明の概略：cot と coth を組み合わせる。(ゼータ偶数値は cot だけを単独で使ったのだった)

$$\frac{\pi}{2} \cot(\sqrt{w\alpha}) \coth(\sqrt{w\beta}) = \frac{1}{2w} + \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{\alpha} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\textcolor{red}{m}\alpha \coth(m\alpha)}{w + \textcolor{red}{m}^2\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\textcolor{red}{m}\beta \coth(m\beta)}{w - \textcolor{red}{m}^2\beta}$$

の両辺の w^r ($r \geq 1$) の係数を比べるとラマヌジャンの公式が登場する。

- 実は、オイラーの公式とラマヌジャンの公式はもっと一般的な定理の系である。(これが何なのかは学習中)
- オイラー、ラマヌジャンの公式の L 関数版も存在する。(これは $\sec z$, $\operatorname{sech} z$ とオイラー数を使う)

展望

- $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k+1)z^{2k+1}$ は何か？（いっそのことまとめて考えてしまった方がよい）ラマヌジャンの公式からうまくとり出せないか？
- 約数関数 $\sigma_r(n)$ の性質を詳しく調べる。特に、 r が奇数のときが重要。

ありがとうございました。

参考

- <https://ja.wikipedia.org/wiki/リーマンゼータ関数>
- Andrews, Berndt, Ramanujan's Lost Notebook vol. II, IV, Springer-Verlag.