

無限集合とは？

連続講義第 15 回
小林雅人

神奈川大学 & 一橋大学

2022 年 2 月 7 日

概要

無限集合にまつわる話を 2 つします。

- 無限集合とは何か？
- 2 種類の無限集合：可算集合、非可算集合

大数学者ヒルベルトの経営する「ホテル・インフィニティ」には無限個の客室があり、 $1, 2, 3, \dots$ と自然数の番号が振られている。ある日の夜、一人の男がホテルを訪れた。

「今夜、一泊できないかね？」

「お客様、あいにくですが今夜は満室でございます。」

「**無限に客室があるのに満室**か…運が悪かった！」

「ご心配なく。いいアイディアがございます。今から、客室 1 にお泊まりのお客様は客室 2 に移動して頂きます。同様に、客室 2 にお泊まりのお客様は客室 3 に $\dots$, 客室 n にお泊まりのお客様は客室 $n + 1$ に $\dots$ 。すると、1 番の客室が空きますので、そこへお客様がお泊まり頂けます。他のお客様は、客室が 1 つずれただけで何の問題も生じません」

「そうか！ その手があったか。では頼む。」

こうしてこのお客は泊まることができたという。

A, B : 集合

$a \in A$ ならば $a \in B$ が成り立つとき、 A は B の**部分集合**であるといい、 $A \subseteq B$ で表す。

$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ のとき、 $A = B$ とする。

$B \subseteq A$ かつ $B \neq A$ となる集合 B を A の**真部分集合**という。

例： $A = \{1, 2\}$ ならば

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

が A の部分集合。このうち、真部分集合は

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}$$

の 3 つ。

引き続き、 A, B を集合とする。

各 $a \in A$ に対して、ある要素 $f(a) \in B$ を対応させる規則があるとき、 f を A から B への**写像**であるといい、まとめて記号 $f : A \rightarrow B$ で表す。

例

$\mathbf{R}$: 実数全体の集合

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2$$

は写像である。

$$g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x, y) = x + y$$

は写像である。

$f : A \rightarrow B$ を写像とする。各 $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$ となるとき、 f は**全射**であるという。
また、

$$f(a_1) = f(a_2), a_1, a_2 \in A \implies a_1 = a_2$$

のとき f は**単射**であるという。

2つのグループ

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

があり、 A のメンバーがそれぞれ B のメンバーからひとりを選んでプロポーズをする。

- 全射は B の全員がプロポーズされること
- 単射は A の各メンバーのプロポーズの相手が全員異なること
という状況だと考えることができる。

$f : A \rightarrow B$ が全射かつ単射のとき、**全単射**であるという。

A と B の間に全単射が存在するとき、集合 A, B は**同型**であるといい、記号 $A \cong B$ で表す。

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$$

$$f : A \rightarrow B, f(a) = a$$

とすれば f は全単射であり、 $A \cong B$.

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

とすると B の方が要素の個数が多いので、全射 $f : A \rightarrow B$ は存在しない。よって、 $A \not\cong B$.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3\}$$

とすると A の方が要素の個数が多いので、単射 $f : A \rightarrow B$ は存在しない。よって、 $A \not\cong B$.

$A \cong \{1, 2, \dots, n\}$ が成り立つとき、 A を有限集合であるという。さらに、このとき A の濃度は n であるといい、記号

$$|A| = n$$

で表す。

有限集合の同型と濃度

A, B を有限集合とする。

$$A \cong B \iff |A| = |B|.$$

A が無限集合であるとは、ある A の部分集合 B が存在して

$$B \cong A, \quad B \neq A$$

が成り立つことをいう。

B は A の真部分集合であって、しかも A と全く同じ濃度をもつということである。(有限のときには起きない現象)

例

ヒルベルトのホテルの話に戻ろう。

$$A = \mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, \}$$

$$B = \{2, 3, 4, \dots, \}$$

とすると、 A と B は写像 $n \mapsto n + 1$ によって同型である。これは $\mathbf{N}$ が無限集合であることを示す。

他の例

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

は自然数全体、

$$2\mathbf{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

は偶数全体の集合。

$$2\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{N}$$

なので、 $\mathbf{N}$ は無限集合。

A を無限集合とする。 $A \cong \mathbf{N}$ のとき、 A は**可算無限集合**であるという。この場合、 A の要素を漏れなく重複なく

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

と 1 列に並べて書くことができる。

この言い方には違和感があるかもしれない。どんな無限集合でも、その要素を

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

と 1 列に並べて書くことができるだろう？ と。

でも、そうではないというのがまさにこの議論のポイント。

「1 列に並べて書くことができないくらい要素が多い」

という無限集合も存在する。「無限」にも最低 2 種類あり、それらには本質的な差があるということ。

可算でない無限集合の例は、実数全体 $\mathbf{R}$ である。
カントールの定理： $\mathbf{R}$ は非加算無限集合である。

証明 (カントールの対角線論法) :

$\mathbf{R}$ が可算であるとする、その無限部分集合 $(0, 1]$ も可算である。すると全単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow (0, 1]$ が存在する。それぞれの値を無限小数に展開して、

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3} \cdots$$

(a_{ni} は 0 から 9 の整数) と表そう。

$$f(1) = 0.\mathbf{a_{11}}a_{12}a_{13} \cdots$$

$$f(2) = 0.a_{21}\mathbf{a_{22}}a_{23} \cdots$$

$$f(3) = 0.a_{31}a_{32}\mathbf{a_{33}} \cdots$$

$\cdots$

ここで、

$$b_n = \begin{cases} 1 & a_{nn} = 0, 2, 4, 6, 8 \\ 2 & a_{nn} = 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases}$$

とおくと、 $b \in (0, 1]$ なので $b = f(n)$ となる n が存在する。

しかし、第 n 位の桁を比べると等しくないので矛盾。 ■

可算無限集合

$$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \dots$$

非可算無限集合

$$\mathbf{R}, \mathbf{C}, \dots$$

A, B が無限集合で $A \subseteq B$, $A \not\cong B$ のとき $|A| < |B|$ で表す。

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}, \mathbf{N} \not\cong \mathbf{R}$$

なので、

$$|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$$

である。

$$|\mathbf{N}| = \aleph_0$$

$$|\mathbf{R}| = \aleph$$

という記号がある。(ℵ はアレフと読む)

無限集合にまつわる問題：

$$\aleph_0 < |A| < \aleph$$

となる無限集合 A が存在するか？

ありがとうございました。