

オイラーの $O=D$ 定理

小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2022 年 9 月 1 日

(次回とその次 10/6, 11/3 も木曜日です)

概要

分割数の理論で、オイラーは五角数定理の他に $O=D$ 定理を証明した。これはある 2 種類の分割 (Odd, Distinct) の個数が等しいという主張。今回は考え方や証明まで含めて定理を紹介する。

証明のポイントは、実は

$$\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x$$

という非常に単純な等式である。

分割数の理論

自然数の**分割**の数え上げに関する理論。ヤコビ、ガウス、オイラー、マクマホン、ハーディ、ラマヌジャンなど名だたる数学者が代数学、解析学、組合せ論などを総動員して研究を行った。

分割

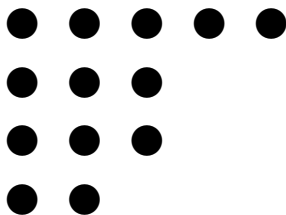
自然数 n の**分割**とは、自然数の単調減少列で、その成分の和が n になるものである。例えば、

$$5 + 3 + 3 + 2$$

は 13 の分割。

分割の各項を**和因子**と呼ぶ。

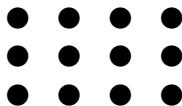
分割はよく ● を並べて表す。例えば、
 $13=5+3+3+2$ は



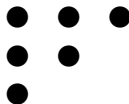
と表せる。

分割に条件を課していくと、いろいろな種類ものを考えることができる。

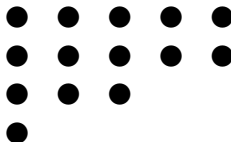
長方形：和因子が 1 種類しかないもの。



三角形：和因子が 1 ずつ減り、1 で終わるもの。



和因子がすべて奇数のもの。



他にも、

- 和因子がすべて 3 の倍数であるもの
- 和因子の個数が 3 個以下のもの
- 和因子が相異なるもの
- 和因子に 24 の倍数は出てこないもの

…などなど、実に多様な分割が存在する。

さて、分割に関する問題は…やはり数え上げである。

主要な問題

n のある条件を満たす分割は何通りあるか？

まずは、何の条件もつけずに、すべての分割を数えてみよう。

分割数

$p(n)$ で非負整数 n の分割の個数を表す。ただし、 $p(0) = 1$ と約束する。

例えば、 $n = 1$:

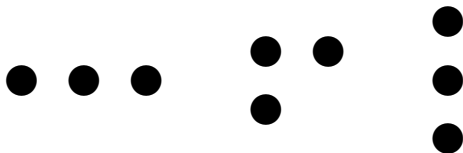


$n = 2$:



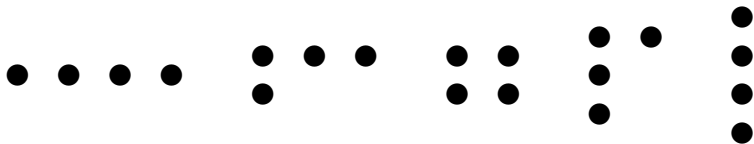
より $p(1) = 1, p(2) = 2$.

$n = 3 :$



より、 $p(3) = 3$.

$n = 4 :$



より $p(4) = 5$.

…ここまではフィボナッチ数列と一致!

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	...

しかし、実は $p(5) = 7$ なので事はそう単純ではない。

ただ、数列 $(p(n))$ が単調増加であることはすぐわかる。

$$p(n+1) \geq p(n)$$

(n の分割の末尾に 1 を加えると、 $n+1$ の分割ができるから) $p(n)$ の一般項は何だろうか？

実は、 $p(n)$ には Hardy-Ramanujan-Rademacher による公式が知られていて、 n の式による表示が存在する。ただし、これはとても複雑である。

他の種類の分割数についてもそうで、**分割の個数を決める数式は、とても複雑かあるいは全く知られていないことが多い**。そうになると数え上げ問題はあまりうまくいかなそうだが…

ここで、発想を変えてみる。ある 2 種類の分割の個数が等しいということは（その 2 種類が何通りか分からなくても）全単射を構成すれば証明できる。オイラーの五角数定理のフランクリンによる証明は、この手法による。

例えば、

- 100 の分割 と、

- 300 の、和因子がすべて 3 の倍数から成る分割

は個数が等しい。これは自然な全単射

$$100 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

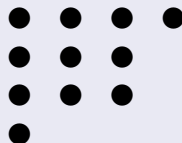


$$300 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \cdots + 3\lambda_k$$

が存在するからである。

自己共役

転置しても変わらない分割を自己共役という。例えば、

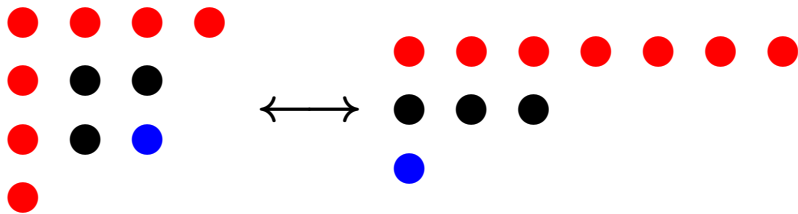
$$4 + 3 + 3 + 1 =$$


は自己共役。

n の

- 自己共役な分割 と
- 和因子が奇数の分割

の個数は等しいこともすぐわかる。次のような全単射を構成すればよい。(これを数式で書くとわりと手間だが、図で書けば一目瞭然)



ところが、このような全単射を構成しなくても分割の個数が等しいことを証明できるさらに強力な方法がある。

記号 q を用意しよう。数列 $a(n)$ ($n \geq 0$) に対して

$$A(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$$

を $a(n)$ の**母関数**という。

2つの数列の母関数が等しければ、数列も等しいことになる。つまり、

$$A(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n, \quad B(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$$

なら

$$A(q) = B(q) \iff a(n) = b(n) \quad \forall n.$$

さて、いよいよオイラーの $D=O$ 定理の話に移る。

すべての和因子が奇数の分割を **○ 分割**と呼ぶことにしよう。
例えば、

$$\begin{aligned}9 &= 7 + 1 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1 \\&= 3 + 3 + 3 = 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\end{aligned}$$

などは 9 の ○ 分割である。自然数 n の奇数分割の個数を $p_{\circ}(n)$ で表す。上の式が 9 の ○ 分割すべてを尽くすので、
 $p_{\circ}(9) = 8$.

また、各和因子が相異なる分割を **D 分割**と呼ぶことにする。

$$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$$

$$= 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 4 + 3 + 2$$

$p_D(n)$ で n の D 分割の個数を表せば、 $p_D(9) = 8$ であり、 $p_O(9)$ に等しい。実は、この一致は偶然ではなく、すべての非負整数 n について正しい。(ただし、 $p_O(0) = p_D(0) = 1$ と約束する)

オイラーの $O=D$ 定理

すべての自然数 n に対して、 n の O 分割と D 分割の個数は等しい。

証明：母関数

$$P_O(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_O(n)q^n, \quad P_D(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_D(n)q^n$$

を考えて、 $P_O(q) = P_D(q)$ を示せばよい。

無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}} = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \cdots}$$

$$= (1 + q + q^2 + \cdots)(1 + q^3 + q^6 + \cdots)(1 + q^5 + q^{10} + \cdots) \cdots$$

を考えると、展開後の各項は

$$q^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m}, \quad \lambda_j \text{ は奇数の倍数}$$

の形であるから、整理すればこのベキ級数は $p_o(n)$ に等しい。

すなわち、 $P_o(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}}$ である。

また、無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k) = (1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3) \cdots$$

を展開すれば

$$q^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \text{ は相異なる}$$

のような項が出て来る。これは D 分割に対応する。しかも、どんな自然数の D 分割も必ず 1 回だけこの展開に登場する。したがって、整理すればこの級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_D(n) q^n$$

に等しい。

p_O の方の母関数を変形していくと、

$$\begin{aligned} P_O(q) &= \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^3} \frac{1}{1-q^5} \cdots \\ &= \frac{1}{1-q} \frac{\mathbf{1-q^2}}{\mathbf{1-q^2}} \frac{1}{1-q^3} \frac{\mathbf{1-q^4}}{\mathbf{1-q^4}} \frac{1}{1-q^5} \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^{2k}}{1-q^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1+q^k) \\ &= P_D(q). \blacksquare \end{aligned}$$

このような方法によって、ある 2 種類の分割の個数が等しいこともどんどん示せる。例えば、

$$\frac{1 - x^3}{1 - x} = 1 + x + x^2$$

を使っても似たような結果が証明できる。

以上です。ありがとうございました。

文献

アンドリュース&エリクソン、佐藤文広訳、整数の分割、数学書房