

Euler の五角数漸化式の三角数版

小林雅人

神奈川大学

2022 年 8 月 19 日

JCCA2022

進行

1. 分割数
2. 五角数漸化式 1
3. 約数関数
4. 五角数漸化式 2
5. 主定理：三角数漸化式

Leonhard Euler



「Eulerは呼吸をする
ように計算をした」

研究の動機と概要

Euler は約数関数の五角数漸化式を発見した。彼に憧れて…それを改良した三角数版を発見したので紹介。

- Euler (1751) : 五角数漸化式
- Ewell (1977) : 四角数漸化式
- Kobayashi (2022+) : 三角数漸化式

分割数の理論

自然数の**分割**の数え上げに関する理論。
Jacobi, Gauss, Euler, MacMahon,
Hardy, Ramanujan など名だたる数学者が
代数学、解析学、組合せ論などを総動員して
研究を行った。

まずは、事の発端となった分割から解説していく。

分割

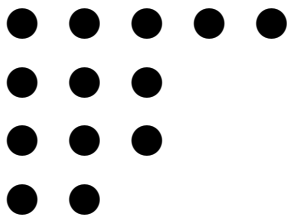
自然数 n の**分割**とは、自然数の単調減少列で、その成分の和が n になるものである。例えば、

$$5 + 3 + 3 + 2$$

は 13 の分割。

分割の各項を**和因子**と呼ぶ。和因子が相異なるとき、**相異なる**分割という。

分割はよく ● を並べて表す (ヤング図形)。
例えば、 $13=5+3+3+2$ は



と表せる。

分割数

$p(n)$ で非負整数 n の分割の個数を表す。ただし、 $p(0) = 1$ と約束する。

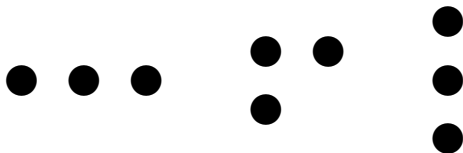
例えば、 $n = 1$:



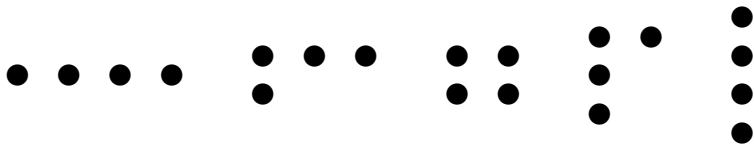
$n = 2$:



より $p(1) = 1, p(2) = 2$.

$$n = 3 :$$


より、 $p(3) = 3$.

$$n = 4 :$$


より $p(4) = 5$.

…ここまではフィボナッチ数列と一致!

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	...

しかし、実は $p(5) = 7$ なので事はそう単純ではない。

数列 $(p(n))$ は単調増加。ただし、その増え方は不規則に見える。ただ、何らかの関係式が存在するのでは？

いっそのこと $(p(n))$ をまとめて扱うのが便利。

[q の世界へようこそ]

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}$$

Euler はこの逆元を考え、 p に関する「五角数漸化式」を証明。

五角数

五角数とは、 $e_m = \frac{1}{2}m(3m - 1)$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) の形に表される非負整数のことである。

m	0	1	2	3	4	5	$\dots$
e_m	0	1	5	12	22	35	$\dots$
e_{-m}	0	2	7	15	26	40	$\dots$

五角数の名前の由来：

$$e_2 = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}, \quad e_{-2} = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \end{array}$$

$$e_3 = \begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \end{array}, \quad e_{-3} = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

のように四角形と三角形を合わせると、五角形ができるから。

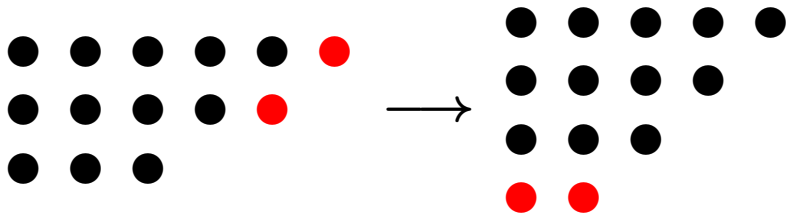
定理 1: Euler の五角数定理

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{e_n}.$$

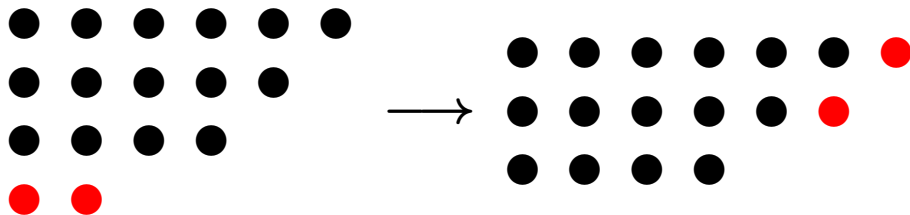
証明 (Franklin) 分割に次のような操作を考える。

n の相異なる分割を考えて、

(1) 右端の対角線が最小の和因子より短いときは、対角線を最小の和因子になるように移動する。



(2) 右端の対角線が最小の和因子より等しいか長いとき、最小の和因子を右端の対角線の隣に 1 つずつ移動する。



(1), (2) は互いの逆操作であり、和因子の個数の偶奇を変える。

ただし、この写像がうまく定義できない分割が存在する。それは、正方形と三角形から成る五角形の分割である。(このとき、 n は五角数である)

$$e_3 = \begin{array}{cccccc} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad e_4 = \begin{array}{cccccc} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

以上をベキ級数の等式で表すと、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{e_n}. \blacksquare$$

定理 2:五角数漸化式 (Euler)

$$p(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} (p(n - e_m) + p(n - e_{-m})).$$

ただし、右辺の和の中で $p(k)$, $k < 0$ という項が現れたら $p(k) = 0$ と解釈する。したがって、右辺は実際には有限和である。

いくつか例を見ていこう。

$p(6)$ は $\{p(5), p(4), p(1)\}$ から計算できる。

計算例

$$\begin{aligned} p(6) &= p(6 - 1) + p(6 - 2) - p(6 - 5) \\ &= p(5) + p(4) - p(1) \\ &= \mathbf{7} + \mathbf{5} - \mathbf{1} = \mathbf{11} \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11

計算例

$$\begin{aligned} p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) \\ &= \mathbf{11} + \mathbf{7} - \mathbf{2} - \mathbf{1} \\ &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15

実は、Euler の五角数漸化式はもう 1 種類ある。

約数関数

自然数 n に対して、

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

とする。

6 の約数は 1, 2, 3, 6 なので

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

n	1	2	3	4	5	6	...
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	...

$\{\sigma(n)\}$ も不規則に見えるが…何か関係式を満たす？ そう、 $\sigma(6) = \sigma(2)\sigma(3)$.

乗法性

m, n が互いに素な自然数ならば、

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

実は、これ以外に**加法的**な漸化式が存在する。ココがオイラーの慧眼。

計算例

$\sigma(6)$ は $\{\sigma(5), \sigma(4), \sigma(1)\}$ から計算できる。

$$\begin{aligned}\sigma(6) &= \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1) \\ &= \mathbf{6} + \mathbf{7} - \mathbf{1} = \mathbf{12}\end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12

計算例

$$\begin{aligned}\sigma(7) &= \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - \underbrace{\sigma(0)}_7 \\ &= 12 + 6 - 3 - 7 \\ &= 8.\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(n)$	"7"	1	3	4	7	6	12	8

定理 2': 五角数漸化式 2 (Euler)

$$\sigma(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} (\sigma(n - e_m) + \sigma(n - e_{-m})).$$

ただし、右辺は $\sigma(0) = n$, $\sigma(k)$, $k < 0$ という項が現れたら $\sigma(k) = 0$ と解釈する。

Ewell (1977) はこの四角数版を証明。

Kobayashi (2022+) は三角数版を発見。
そのために、 σ のバリエーションを考えてみよう。

偶数と奇数の約数関数

$$\sigma_0(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ 偶数}}} d, \quad \sigma_1(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ 奇数}}} d,$$

とおく。

こうすれば、

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) + \sigma_0(n)$$

と表せる。そこで、

$$\sigma^*(n) = \sigma_1(n) - \sigma_0(n)$$

も考えるのが自然。

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\sigma_0(n)$	0	2	0	6	0	8	0	...
$\sigma_1(n)$	1	1	4	1	6	4	8	...
$\sigma^*(n)$	1	-1	4	-5	6	-4	8	...

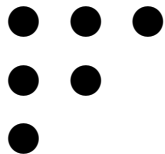
σ^* が満たす関係式は？

今度は、**三角数**に関する漸化式が存在する。

三角数

$t_k = \frac{k(k+1)}{2}$ ($k \geq 0$) と表せる整数を**三角数**という。

名前の由来は、

$$t_3 = 3 + 2 + 1 =$$


のように三角形の分割が存在するから。

$T = \{t_k \mid k \geq 0\}$ の特性関数を

$$\chi_T(n) = \begin{cases} 1 & n \in T, \\ 0 & n \notin T \end{cases}$$

とする。

定理 3: 三角数漸化式 (Kobayashi 2022+)

$$\sigma^*(n) = - \sum_{k \geq 1} \sigma^* \left(n - \frac{k(k+1)}{2} \right) + n \chi_T(n).$$

例

10 は三角数なので、

$$\begin{aligned}\sigma^*(10) &= -(\sigma^*(9) + \sigma^*(7) + \sigma^*(4)) + 10 \\ &= -(\mathbf{13} + \mathbf{8} - \mathbf{5}) + \mathbf{10} = \mathbf{-6}.\end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma^*(n)$	1	-1	4	-5	6	-4	8	-13	13	-6

系

$n \notin T$ ならば

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \sigma_0 \left(n - \frac{k(k+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \sigma_1 \left(n - \frac{k(k+1)}{2} \right). \end{aligned}$$

例 $n = 7$.

$$\sigma_0(7) + \sigma_0(6) + \sigma_0(4) + \sigma_0(1) = \mathbf{0 + 8 + 6 + 0} = 14.$$

σ_1 の方も

$$\sigma_1(7) + \sigma_1(6) + \sigma_1(4) + \sigma_1(1) = \mathbf{8 + 4 + 1 + 1} = 14$$

で一致。つまり、 $\{7, 6, 4, 1\}$ という数それぞれの奇数の方の約数の和と、偶数の和は等しい。

定理 1, 2, 3 の証明の概略：形式的ベキ級数の等式

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}$$

の両辺を対数微分し、 q をかけて σ, σ^* に関する Lambert 級数を導く。そして両辺のベキ級数の係数を比較すると定理の式が登場する。 ■

展望

- 無限積や Lambert 級数を使うのは、いわば、代数的&解析的な証明。もっと素朴に、Franklin 全単射のような、組合せ論的な証明で私の定理を証明したい。
- 紹介した結果は、すべて Jacobi 三重積公式が元になっている。五重積公式を使うとどうなるか？

- Ramanujan のテータ関数

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{(n-1)n/2}$$

$(a, b \in \mathbf{C}, |ab| < 1)$ を用いると、

$$f(q, q^3) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{t_n},$$

$$f(q, q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{e_n}$$

である。 $f^2(q, q^3)$ の計算 (Jacobi, Ramanujan) を真似て、 $f^2(q, q^2)$ をうまく計算し、自然数を 2 つの五角数の和に分ける数え上げの問題を解きたい **34 / 35**

ありがとうございました。