いろいろな種類の数、周期、多重ゼータ

小林雅人

2021年11月1日

概要

いろいろな種類の数について話します。さらに、**周期**という新しい種類の数を紹介し、多重ゼータとの関係を考察します。

数学は、数を扱う学問です。では、世の中にはどんな種類の数が存在するのでしょうか？

$$0, 1, 2, 3, -1, -2, -3,$$

$$0.1, 0.999999\cdots, \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}, \log 2$$

円周率

$$\pi = 3.1415926535\cdots$$

ネイピア数

$$e = 2.718281828\cdots$$

オイラーの定数

$$\gamma = 0.577215664901\cdots$$

虚数単位 i

１の原始３乗根

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

無限和

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

無限積

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

黄金比

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

スキューズ数

$$10^{10^{10^{34}}}$$

グーゴルプレックス

$$10^{10^{100}}$$

1 阿伽羅

$$10^{224}$$

三角関数の π の有理数倍での値

$$\cos\frac{\pi}{5}$$

四元数

$$1+2i+3j+4k$$

リーマンゼータ

$$\zeta(3)=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

ガンマ関数

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3=2^{4/3}3^{1/2}\pi\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}dx$$

主な数の分類

- 自然数
- 整数
- 有理数
- 無理数
- 実数
- 複素数
- 四元数
- 代数的数

- 超越数
- **周期**

よく使う数（モノイド、群、環、体と関連）

- 自然数

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

- 整数

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- 有理数

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$$

- 実数

$$\sqrt{2}, \log 2, \pi, e, \ldots$$

これらの数に共通する特徴：**和**と呼ばれる演算があり、次のような性質を備えている。

- a, bがある種類の数のとき、$a+b$もまたその種類の数。
- $a+b=b+a.$
- $(a+b)+c=a+(b+c).$

自然数、整数、有理数、実数はこれらを満たす。

和だけでなく、積についても同様の性質がある。

- a, bがある種類の数のとき、abもまたその種類の数。
- $ab = ba.$
- $(ab)c = a(bc).$

ただし、数の種類によっては、このような性質は成り立たない。

例えば、無理数の和は無理数とは限らない。

$$a = \sqrt{2}, \quad b = -\sqrt{2}$$

とすると、a, bは無理数だが、$a+b=0$は有理数。

無理数の積も無理数とは限らない。

$$c = \sqrt{2}, \quad d = \sqrt{2}$$

とすると、c, dはそれぞれ無理数だが、$cd = 2$は有理数。

したがって、和や積について無理数全体を論じることは少ない。

複素数

直交軸でx軸を実数，y軸を虚数とする座標面を複素平面という。このとき、x軸を実軸、y軸を虚軸という。

複素数の表示

iを$i^2 = -1$を満たす記号とし、

$$z = x + yi, \quad x, y \text{ は実数}$$

という形の数が複素数。

複素数の和や積は、iの多項式のように計算できるので、和や積に関する交換法則や結合法則が成り立つ。

四元数

i, j, k を

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ji = -ij, kj = -jk, ki = -ik$$

を満たす記号とする。

$$z = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \text{ は実数}$$

のように表せる数をハミルトンの**四元数**という。

これらでは、積の交換法則が成り立たない。(一方、結合法則は成り立つ)

代数的数

整数係数の多項式の解になる複素数。記号は$\overline{\mathbf{Q}}$.

例

$$2x - 1 = 0$$

の解である$x = \frac{1}{2}$.

$$x^2 - 2 = 0$$

の解である$x = \sqrt{2}$.

$$4x^2 - 2x - 1 = 0$$

の解である$x = \cos\frac{\pi}{5}$.

$$x^2 + 1 = 0$$

の解である$x = i$.

$$x^3 - 1 = 0$$

の解である$x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

代数的数でない複素数を、**超越数**という。

定理

[1]　リンデマン (1882)：π は超越数である。

[2]　エルミート (1873)：e は超越数である。

したがって、$\sqrt{2}$ も π も無理数なのだが、π の方が何か潜在的に複雑な数であるといえる。

これで、主な数の分類は終わったと思っていた…しかし、2001 年に新しい数の種類の発見があった！

それらは、コンツェビッチとザギエにより**周期**(period) と名づけられた。

周期とは？

複素数 $z = x + yi$ $(x, y$ 実数$)$ が**周期**であるとは、

$$x = \int_D f(t)dt, \quad y = \int_E g(u)du,$$

f, g は有理係数の（多変数）有理関数、D, E は有理係数の多項式の不等式で定義されたユークリッド空間内の領域

と表せることをいう。(広義積分でもよい)

例

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \le 1} 1 dx$$

なので$\sqrt{2}$は周期。

$$\log 2 = \int_{1 \le x \le 2} \frac{1}{x} dx$$

なので$\log 2$も周期。

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \le 1} 1 dx dy$$

なのでπは周期。

$$\zeta(2) = \int_{0<y<x<1} \frac{1}{x(1-y)} dy dx$$

なので$\zeta(2)$は周期。

$$\zeta(3) = \int_{0<z<y<x<1} \frac{dz dy dx}{xy(1-z)}$$

なので$\zeta(3)$は周期。

多重ゼータ

自然数 $k_1,\ldots,k_d$, $k_1 \geq 2$ に対して

$$\zeta(k_1,\ldots,k_d) = \sum_{n_1>\cdots>n_d} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_d^{k_d}}$$

とする。

定理（コンツェビッチ、ドリンフェルド）

多重ゼータの値はすべて周期である。（つまり、多重ゼータの値を実現するようなうまい積分表示が存在する。よって、多重ゼータの関係式は、この積分の性質から出て来る）

他の数との関係

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \overline{\mathbf{Q}} \subseteq \mathbf{C}$$

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \overline{\mathbf{Q}} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{C}$$

性質

- 周期の和はまた周期。
- 周期の積もまた周期。

周期は、和や積に関する交換法則や結合法則も自然に満たすよい性質を備えた数。

周期に関する主な問題

Q. ある複素数が周期かどうかをどうやって判定したらよいか？

例えば、e は周期だろうか？　オイラー定数 γ は？

e は周期ではないと予想されている。一方、π は周期なので、予想が正しければ、e は π よりも潜在的により複雑な超越数であるといえる。

注：周期はたくさんの積分表示をもつ。

$$\pi = \int_{x^2+y^2\leq 1} 1dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

Q．２つの周期が同じかどうかをどうやって判定するか？

例えば、

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

$$\text{と} \quad \sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

は同じ周期を表す。一方、

$$\frac{\sqrt{163}\pi}{3}, \quad \log(640320)$$

は小数点14ケタまで一致するが、異なる周期。

Q．周期の積分表示はすべて本質的に同じものか？

つまり、変数変換を行うと一方から他方へ必ず変形できるか？

ありがとうございました。

参考文献

Kontsevich, Maxim; Zagier, Don (2001), "Periods", in Mathematics unlimited–2001 and beyond, Berlin, New York: Springer-Verlag, pp. 771-808.