

# ゼータ関数 1：ゼータ正の偶数値 ～三角関数の奥へ～

連続講義第 2 回  
小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2020 年 11 月 2 日

# 目次

## 今日の話

ゼータ関数の入門。  
特に、ゼータ関数の正の偶数値の詳細

キーワード

- バーゼル問題
- ゼータ関数
- $\zeta(2)$ ,  $\zeta(4)$
- 三角関数
- ゼータ正の偶数値

## バーゼル問題 (オイラー 1735)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

注目すべきは、いきなり  $\pi$  が登場すること。なぜか？

計算法：正弦関数  $\sin x$  を用いる。

そこで、 $\sin x$  に関する2つの事実を確認しておく。

$\sin x$  には無限和の表示

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

が存在。

$\sin x$  には無限乗積分解

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

が存在。

## バーゼル問題の解決：無限積

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots$$

とマクローリン級数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

の  $x^3$  の係数を比べて

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{3!}$$

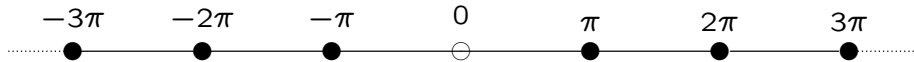
から

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

が導ける。 ■

この証明のポイント：次の関係性

$$\boxed{0 \text{ でない整数の } \pi \text{ 倍}} = \boxed{\frac{\sin x}{x} \text{ の零点}}$$



この零点は  $(m\pi, -m\pi)$  と **2** つペアで現れる。これが平方数の逆数和に  $\pi^2$  が登場した本質的な理由である。

## ゼータ関数

$s \geq 2$  を満たす自然数  $s$  に対して、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$

ゼータ偶数値は次のようになる。

| $2s$ | $\zeta(2s)$              | $2s$ | $\zeta(2s)$                               |
|------|--------------------------|------|-------------------------------------------|
| 2    | $\frac{\pi^2}{6}$        | 12   | $\frac{691\pi^{12}}{638512875}$           |
| 4    | $\frac{\pi^4}{90}$       | 14   | $\frac{2\pi^{14}}{18243225}$              |
| 6    | $\frac{\pi^6}{945}$      | 16   | $\frac{3617\pi^{16}}{325641566250}$       |
| 8    | $\frac{\pi^8}{9450}$     | 18   | $\frac{43867\pi^{18}}{38979295480125}$    |
| 10   | $\frac{\pi^{10}}{93555}$ | 20   | $\frac{174611\pi^{20}}{1531329465290625}$ |

$\zeta(2s)$  は、1 にかなり近い。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493 \dots ,$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.08232 \dots ,$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.10734 \dots ,$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} = 1.004077 \dots ,$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1.00099 \dots$$

実際、 $\{\zeta(2s)\}$  は  $s \rightarrow \infty$  で 1 に近づいていく。

バーゼル問題は、 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  を意味する。

では、ほかの値は？

$$\zeta(3) = ?$$

$$\zeta(4) = ?$$

$$\zeta(5) = ?$$

## 定理（これもオイラー）

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

どうやって計算したらよい？

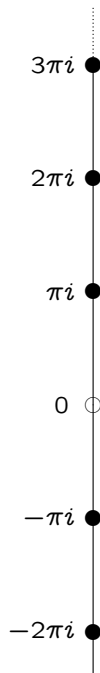
→  $\zeta(4)$  は、 **$\sin x$  と  $\sinh x$  を組み合わせる**と計算できる。

## 双曲正弦関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sin x$  の仲間。 $\sinh(ix) = i \sin x$  なので、 $\sin x$  を虚軸上で考えたものと思ってよい。

$\sinh x$  の零点は縦に並ぶ。



$\sin x$  と似た 2 つの事実を確認しておく。

## マクローリン展開

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

## 無限乗積

$$\sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

証明：

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \text{と} \quad \sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

の積をとり、 $x^2$  で割って関数

$$\frac{\sin x \sinh x}{x^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^4}{n^4\pi^4}\right)$$

を考える。両辺の  $x^4$  の係数を比較しよう。

$$(\text{左辺}) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \cdots\right)$$

なので、 $x^4$  の係数は  $\frac{1}{1!5!} - \frac{1}{3!3!} + \frac{1}{5!1!} = -\frac{1}{90}$ 。右辺のそ

れは  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}$  であるから、これらを等しいとすると

$$-\frac{1}{90} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}, \quad \text{つまり} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad \blacksquare$$

では、 $\zeta(6), \zeta(8), \zeta(10), \dots$  については？ →ベルヌーイ数列で表現できる。

## ベルヌーイ数列

数列  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  を漸化式

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \quad (n \geq 1)$$

で定める。

| $n$   | 0 | 1              | 2             | 4               | 6              | 8               |
|-------|---|----------------|---------------|-----------------|----------------|-----------------|
| $B_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $-\frac{1}{30}$ |

$$B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$$

## 定理（オイラー）

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

証明の概略： $\cot x - \frac{1}{x}$  の部分分数分解を用いる。この関数の極が  $\pm m\pi$  ( $m$  は自然数) になることから出てくる。  
 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  なので、 $\zeta(2n)$  は本質的にやはり  $\sin x$  の奥底に組み込まれている。

(9 月の中川さんのコメントについて：多重ゼータもいろいろと三角関数の奥に眠っているようです)

書き換えてみると…

$$\zeta(2n) = ((-1)^{n+1} B_{2n}) \cdot (2\pi)^{2n} \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2}$$

## 考察

- $2\pi$  のべきが  $\zeta(-)$  の引数  $2n$  に等しい。
- さらに、 $2n$  の階乗が登場する。
- 分母には 2 がポツンと登場する。

なぜか？ もしきちんと答えることができたなら、ゼータの核心に近づける。

## 考察

- $\{\zeta(2n + 1)\}$  にはいろいろな関係式が存在する（詳しくはまた来年）。

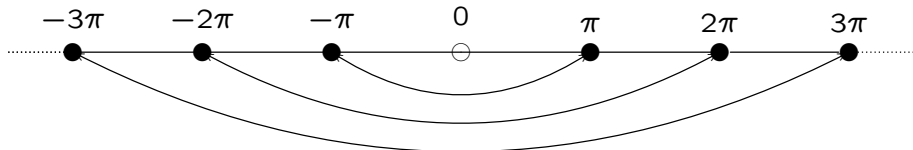
ただ、正確な値はわかっていない。

なぜ、 $\zeta(2n)$  と似たような手法で計算できないのだろう？

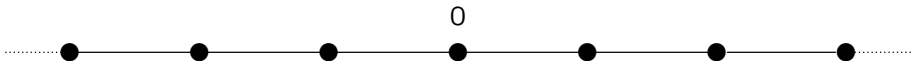
「偶数」に比べて「奇数」は格段に難しいからだ。  
例えば、整数全体には

$$m \mapsto -m$$

と 2 回対称性が存在するが、3 以上の奇数回対称性は存在しない。



「周期関数」は、どうしても零点が直線上に離散的に並んでしまうので、2 回対称性が生じてしまう。(直線を組み合わせても同じ)



単に三角関数を考えるだけでは、うまくいかない。ならば、

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

$$\frac{\sin x \sinh x}{x^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^4}{n^4 \pi^4} \right)$$

の間をとって

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^3}{n^3 \pi^3} \right)$$

のような無限積を考えてみたら？

ちなみにラマヌジャンは

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^6}{n^6 \pi^6} \right) = \frac{\sinh(x) \sinh(\omega x) \sinh(\omega^2 x)}{x^3}$$

を考察している。

今考えていること ベルヌーイ数を分解して分析

計算機の得意な人へ…

- ベルヌーイ数の（有理数としての）素因数分解を計算してみたい。  $n = 33$  くらいまで
- $2(2^{2n} - 1)B_{2n}$  は整数（ラマヌジャン）なので、その素因数分解も計算したい。
- $B_{2n}$  が2の何乗で割れるかを正確に知りたい。

**(2020/11/2 講演直後、中川幸一さんに計算して頂きました。)**

# まとめ

- バーゼル問題  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  は  $\sin x$  を使って計算できた。
- $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  は  $\sin x, \sinh x$  を組み合わせて計算できた。
- $\zeta(2n)$  はベルヌーイ数を使って計算できる。これも本質的には  $\sin x$  から来ている。一方で、 $\zeta(2n+1)$  は不明。

ありがとうございました。  
コメントをどうぞ。