

多重ゼータ入門

小林雅人

2021年10月4日

概要

リーマンゼータ ($\dot{1}$ 重ゼータ) の拡張として多重ゼータの入門

- オイラー、ゴールドバッハの公式
- 反転公式
- $\zeta(2, 2, \dots, 2)$ の公式

多重ゼータ：自然数 $k_1, \dots, k_d$, $k_1 \geq 2$ に対して

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) = \sum_{n_1 > \dots > n_d} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_d^{k_d}}$$

とする。 $k_1 + \dots + k_d$ を**重さ**、 d を**深さ**という。

深さが d の多重ゼータを d 重ゼータと呼ぶ。 $k_1 \geq 2$ という条件は、この無限和が収束することを保証している。

1 重ゼータはリーマンのゼータ関数にほかならない。

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

2重ゼータの例

$$\begin{aligned}\zeta(2, 1) &= \sum_{n>m} \frac{1}{n^2 m} \\ &= \frac{1}{2^2 1} + \frac{1}{3^2 1} + \cdots + \frac{1}{3^2 2} + \frac{1}{4^2 2} + \cdots\end{aligned}$$

$$\zeta(3, 2) = \sum_{n>m} \frac{1}{n^3 m^2}$$

では、このような和の値は？

定理 1. (オイラー、ゴールドバッハ) $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$.

1742年ころのふたりの書簡にこの式が登場する。

以下の証明は、スタインバーグ (1952) によるもの。

証明.

$$S = \sum_{n,m>0} \frac{1}{nm(n+m)}$$

とおく。

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n,m>0} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+m} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n} + \sum_{m<n} \frac{1}{m} \right) = \zeta(3) + \zeta(2, 1). \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n,m>0} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{(n+m)^2} = \sum_{n,m>0} \frac{1}{n(n+m)^2} + \sum_{n,m>0} \frac{1}{m(n+m)^2} \\ &= \sum_{N>M} \frac{1}{N^2M} + \sum_{N>M} \frac{1}{N^2M} = 2\zeta(2,1). \end{aligned}$$

したがって、

$$\zeta(3) + \zeta(2,1) = S = 2\zeta(2,1)$$

から $\zeta(3) = \zeta(2,1)$ が言える。



他の2重ゼータの値

$$\zeta(2, 2) = \frac{\pi^4}{120}$$

$$\zeta(3, 2) = 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5)$$

$$\zeta(3, 3) = \frac{1}{2}\zeta(6) + \frac{1}{2}\zeta(3)^2$$

$$\zeta(4, 4) = \frac{2^5}{10!}\pi^8$$

多重ゼータの研究の2つの方向性

- 同じ重さの多重ゼータの関係式を発見
- 多重ゼータを1重ゼータの多項式で表す

多重ゼータの歴史

1700年代オイラー、ゴールドバッハに始まる。その後、200年くらいはあまり目立った進展はなく、1970年代から、金子、大野、ザギエ、ホフマンなどが研究。

定理 2. 反転公式： $k, l \geq 2$ に対して、

$$\zeta(k)\zeta(l) = \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k + l).$$

証明.

$$\begin{aligned}\zeta(k, l) &= \sum_{n>m} \frac{1}{n^k m^l} = \sum_n \frac{1}{n^k} \left(- \sum_{m>n} - \sum_{m=n} + \sum_{m=1}^{\infty} \right) \frac{1}{m^l} \\ &= - \sum_{m>n} \frac{1}{m^l n^k} - \sum_{m=n} \frac{1}{m^l n^k} + \sum_n \frac{1}{n^k} \sum_m \frac{1}{m^l} \\ &= -\zeta(l, k) - \zeta(k + l) + \zeta(k)\zeta(l).\end{aligned}$$

整理すると、

$$\zeta(k)\zeta(l) = \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k + l).$$

を得る。



例えば、

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2, 3) + \zeta(3, 2) + \zeta(5).$$

$$\zeta(3)\zeta(4) = \zeta(3, 4) + \zeta(4, 3) + \zeta(7).$$

特に、反転公式は $k = l$ でも成り立つから、 $\zeta(k, k)$ がリーマンゼータで表せる。

$$\zeta(k)^2 = 2\zeta(k, k) + \zeta(2k)$$

$$\implies \zeta(k, k) = \frac{1}{2}(\zeta(k)^2 - \zeta(2k))$$

3. ザギエ予想（未解決）

- $\zeta(k_1, \dots, k_m)$ はすべて無理数だろう。

（ $\zeta(3)$ が無理数であることくらいしかわかっていない）

- $\zeta(k_1, \dots, k_m)$ はすべて π とリーマンゼータ $\zeta(k)$, $k \geq 2$ の有理係数多項式で書けるだろう。

（このような性質をもつ多重ゼータは無限個発見されている）

定理 4. $\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n)$ の公式

$$\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

例えば

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(2, 2) = \frac{\pi^4}{120}$$

$$\zeta(2, 2, 2) = \frac{\pi^6}{5040}$$

証明.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

より、

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

一方、

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) x^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1^2 2^2} + \frac{1}{1^2 3^2} + \cdots + \frac{1}{2^2 3^2} + \frac{1}{2^2 4^2} + \cdots \right) x^4 + \cdots \\ &= 1 - \zeta(2)x^2 + \zeta(2, 2)x^4 - \zeta(2, 2, 2)x^6 + \cdots . \end{aligned}$$

両辺の x^{2n} の係数を比べると

$$\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

がわかる。



つまり、

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n) x^{2n}$$

である。したがって、ゼータの値は三角関数にギッシリ詰め込まれているというのは、多重ゼータでもいえることがわかる。(このような式は他にもある)

ありがとうございました。

参考

<https://ja.wikipedia.org/wiki/多重ゼータ値>