ゼータ 6
サインゼータ、コサインゼータ、
ベルヌーイ多項式

連続講義第 7 回

小林雅人

神奈川大学＆一橋大学

2021 年 4 月 5 日

キーワード

- **ゼータ関数**
- **ベルヌーイ数**
- **サインゼータ、コサインゼータ関数**
- **ベルヌーイ多項式**

リーマンのゼータ関数

$s \geq 2$ を満たす自然数 s に対して、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

と定める。さらに、$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ としておく。

$\zeta(s)$ の正確な値は何だろう？

バーゼル問題（Euler）

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

奇跡的に、円周率が登場する。

Euler (1734 ∼ 1736)

$$\zeta(2m) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m)!}B_{2m} \quad m \geq 1.$$

ただし、B_{2m} はベルヌーイ数。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\vdots$$

前回の話

$$-\frac{\pi z}{2}\cot(\pi z) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m}.$$

cot には、ゼータ偶数値がギッシリつまっている。
　→他の三角関数には、ゼータに似たものがギッシリつまっている？ というアイディア。これは全く正しい！ しかも三角関数はたくさんある。

ゼータ偶数値 $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6), \cdots$ については完全な答えが出ているが、ゼータ**奇数**値

$$\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \cdots$$

についてはまだよくわかっていない。でも計算したい。どうすればよい？

ゼータにこだわらず、もっと視野を広げてみよう。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^m}$$

の形の級数を考えたい。どんなクラスの級数が良い？

- $|f(n)| \leq 1$
- $f(n)$ は周期的。

となると…

以下では、x は $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数、m は自然数とする。

サインゼータ、コサインゼータ

$$S_{2m+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2m+1}},$$

$$C_{2m}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2m}}$$

と定める。

特に、

$$C_{2m}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{n^{2m}} = \zeta(2m).$$

諸法無我：単独で存在しているものは何 1 つないという仏教の教え。

ゼータ関数は、ほかの関数と関連して存在している。その関係を見抜くのが本質的。

$m = 1$, $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ に対するコサインゼータ：

$$C_2(0) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$C_2(1/4) = \frac{0}{1^2} + \frac{-1}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$C_2(1/3) = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{\frac{1}{2}}{4^2} + \cdots$$

$$C_2(1/2) = \frac{-1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{-1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

これらの値は？

$$C_2(0) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$C_2(1/4) = \frac{0}{1^2} + \frac{-1}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = -\frac{1}{48}\pi^2$$

$$C_2(1/3) = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{\frac{1}{2}}{4^2} + \cdots = -\frac{1}{18}\pi^2$$

$$C_2(1/2) = \frac{-1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{-1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = -\frac{1}{12}\pi^2$$

すべて、 **有理数** $\times \pi^2$ の形。

なお、Wolfram alpha でも計算してくれる。
（フーリエ級数でも計算できる。得意な方、やってみて）

$m = 1, x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ に対するサインゼータ：

$$S_3(0) = \frac{0}{1^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{4^2} + \cdots = 0$$

$$S_3(1/4) = \frac{1}{1^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{-1}{3^2} + \frac{0}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$S_3(1/3) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1^2} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4^2} + \cdots = \frac{2\pi^3}{81}$$

$$S_3(1/2) = \frac{0}{1^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{4^2} + \cdots = 0.$$

こちらも**有理数** $\times \pi^3$ の形。

定理

$0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$C_2(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\pi^2,$$

$$S_3(x) = \frac{2}{3}x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)\pi^3.$$

特に、これらは **x の多項式**である。

$\{C_2(x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ の最大値は、

$$C_2(0) = C_2(1) = \frac{\pi^2}{6} (= \zeta(2)).$$

$\{C_2(x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ の最小値は

$$C_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}\pi^2.$$

では、一般の $C_{2m}(x), S_{2m+1}(x)$ はどうやって計算する？

$$C_{2m}(0) = \zeta(2m) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}$$

を思い出して、ベルヌーイ数の一般化の**ベルヌーイ多項式**を用いる。そして、全部まとめて扱ってしまう。

x を実変数、z を複素変数とする。

ベルヌーイ多項式

多項式の列 $\{B_m(x)\}_{m\geq 0}$ を

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{z^m}{m!}$$

で定める。

$$
\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

ベルヌーイ多項式の性質

$$\deg B_m(x) = m$$

$$B_m(0) = B_m$$

$B_m(x)$ は有理数係数。最高次の係数は 1.

$$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + m^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1}$$

定理

$0 \le x \le 1$ のとき、

$$C_{2m}(x) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}(x)$$

$$S_{2m+1}(x) = -\frac{i}{2}\frac{(2\pi i)^{2m+1}}{(2m+1)!}B_{2m+1}(x)$$

特に、$x = 0$ のとき

$$C_{2m}(0) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m)!}\mathbf{B_{2m}(0)}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m)!}B_{2m} = \zeta(2m).$$

当初の予定通り、コサインゼータ、サインゼータをまとめて扱おう。

コサインゼータ級数、サインゼータ級数を

$$C(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}(x) z^{2m}$$

$$S(x,z) = \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{\infty} S_{2m+1}(x) z^{2m+1}$$

とする。ただし、

$$C_0(x) = -\frac{1}{2}, \quad S_1(x) = -\frac{i\pi}{2}(1-2x)$$

と定める。

定理（Kobayashi 2021）

$$C(x,z) = -\frac{\pi z}{2}\frac{\cos(1-2x)\pi z}{\sin \pi z}$$

$$S(x,z) = -\frac{\pi z}{2}\frac{\sin(1-2x)\pi z}{\sin \pi z}$$

特に、$x = 0$ のとき

$$-\frac{\pi z}{2}\cot(\pi z) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m}.$$

サインゼータ、コサインゼータは三角関数の**積**にギッシリ詰まっている。…ということは、計算可能である。

系

ピタゴラスの定理のゼータ版

$$C(x,z)^2+S(x,z)^2=\left(\frac{\pi z}{2\sin \pi z}\right)^2$$

倍角の公式のゼータ版

$$C(x,z)^2-S(x,z)^2=C\left(\frac{1}{2},z\right)C\left(2x+\frac{1}{2},z\right)$$

x についての微分公式のゼータ版

$$C'(x,z)=2\pi z S(x,z),\quad S'(x,z)=-2\pi z C(x,z)$$

などが成り立つ。

展望

- $C_{2m+1}(0) = \zeta(2m+1)$ なので、$\{C_{2m+1}(x)\}$ を何としてでも計算したい。いっそのこと、**まとめて計算してしまうか？** 双対コサインゼータ級数

$$C^*(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1}(x) z^{2m+1} =?$$

- $C_{2m+1}(x), S_{2m}(x)$ もベルヌーイ多項式に似たようなもので計算できないか？ フーリエ級数は使えないか？
- $C_{2m}(x_{2m}) = 0$ となる $\{x_{2m}\}$ を見つけたい。（ベルヌーイ多項式の零点であり、このような x_{2m} が $S_{2m+1}(x)$ の極値を与えるから、かなり重要であると予想している。Wolfram である程度の値はわかるのだが…）

ありがとうございました。

- https://ja.wikipedia.org/wiki/リーマンゼータ関数
- https://ja.wikipedia.org/wiki/ベルヌーイ数
- https://ja.wikipedia.org/wiki/ベルヌーイ多項式