

等式、平方根、ヒトの脳

連続講義第 14 回
小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2021 年 12 月 6 日

概要

等式とは何か、実数や複素数の平方根、そして数学を考えるときのヒトの脳の特徴について話します。今日はあえてかなり冗長に書いています。

数学には、**等式**がたくさん登場します。

$$a = b$$

という記号は、ある数学的対象 a と b が**ある意味で等しい**という意味です。

例えば、 $\frac{2}{4}$ と $\frac{3}{6}$ は同じ実数を表す 2 つの数式です。したがって、

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

と書くことができます。

また、

$$0.999999\dots$$

と

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

は同じ実数を表す 2 つの数式なので、

$$0.999999\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

と書くことができます。もちろん、これらに等しくなる数式は他にも無限に存在します。つまり**同じ**数学的対象にも**異なる**表現がたくさん存在するわけです。

しかし、我々はこのような数式の中でも

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

$$1 = 0.999999... = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

となるべくわかりやすいものを選ぶ傾向があります。

例えば、 -3 と 3 は符号を除けば値が一致します。これは、絶対値記号を使って

$$|-3| = |3| = 3$$

と表すこともできます。ところが

$$|-3| \neq -3, |3| = 3$$

なので実は -3 と 3 を**不公平に**扱っています。

人の認知として、あるいは歴史的にも**正の数の方をひいき**して扱うというのはとても自然です。

犬やサルのような動物でも、1 ～ 5 くらいの自然数は認知できるようです。しかし、彼らが 0.15 , $\frac{3}{7}$ や -3 という数学的対象を正確に理解できないというのは想像できるでしょう。

ホモサピエンスの歴史は 20 万年。ユークリッドから数学が始まったのはわずか 2000 年前です。したがって、最初の 19 万年でヒトが負の数を正確に認知していなかったとしても何の不思議もありません。

5 と 29 は 12 で割ると両方とも余りが 5 です。この意味では「等しい」わけです。よく次のような記号を使います。

$$5 \equiv 29 \pmod{12}$$

でも、この数式が本当に主張していることは $29 - 5$ が 12 の整数倍になるということです。しかし、我々はなかなか「余り」という発想を捨てることはできません。「余り」という概念を学んでから、 $5 \equiv 29 \pmod{12}$ を知るからです。

- 29 を 12 で割ると余りは 5
- 29 を 12 で割ると余りは **17**
- 29 を 12 で割ると余りは **-7**
- 29 を 12 で割ると余りは **41**

最後の 3 つの文章には違和感をおぼえるはずです。でも、これらも**ある意味で**正しいのです。

平方根

a を正の実数とします。 $x^2 = a$ を満たす実数は**ちょうど 2**
つ存在します。その 2 つは、**必ず** -1 倍だけ違います。(つまり、
一方は正で、他方は負です) 正の方を $\sqrt{a}$, 負の方を $-\sqrt{a}$ と書
くことにしましょう。そして、これらをまとめて扱って

$$R(a) = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$$

と書くことにします。例えば、

$$R(2) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

$$R(9) = \{-3, 3\}$$

です。

まとめて扱うというのは、要するに「情報量を減らしている」ということです。数学は「情報を加えていく」だけでなく、ときには「うまく忘れる」とより本質に迫ることができます。

しかし、これにはある程度頭を働かせる必要があります。ヒトの脳の特性から、情報を加えていく方が認知的に易しいからです。これも、言ってみれば減法より加法びいき、正の数の性質です。

$a = 0$ のときは、状況がまるで異なります。 $x^2 = 0$ を満たす実数 x はちょうど1つしかないからです。当然、それは $x = 0$ で、 $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$,

$$R(0) = \{0\}$$

ということになります。

この $\{R(a) \mid a \geq 0\}$ の間に積を定めるにはどうしたらよいでしょうか？ 実は、

$$R(a)R(b) = R(ab)$$

と定めるとうまくいきます。両辺とも

$$\{-\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\}$$

と解釈できるからです。これは $a \geq 0, b \geq 0$ ならば $ab \geq 0$ という性質が効いています。ところが、 $a < 0$ あるいは $b < 0$ のときは $ab < 0$ とは限らないので、この議論が通用しないことになります。その際は、もっと一般的に考えてみると新たなアイディアが出てきます。

a を $a \neq 0$ を満たす複素数とします。すると、 $z^2 = a$ を満たす複素数は**ちょうど 2 つ**存在し、**必ず** -1 倍だけ異なります。

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i,$$

$$(-(1 + i))^2 = (-1)^2(1 + 2i + i^2) = 2i,$$

なので

$$R(2i) = \{-(1 + i), 1 + i\}$$

です。

特に、 $a = -1$ のとき $z^2 = -1$ を満たす複素数は 2 つあります。そのうち一方を i と書くことにします。**(どちらを選んでもよい)** すると、他方は $-i$ と表せます。

$$R(-1) = \{-i, i\}.$$

$i \neq 0$ なので、 $-i \neq i$ であり、これはちょうど 2 つの複素数から成る集合です。

“ i ”というものがアプリオリにあるのではなく、 $R(-1)$ のうちのどちらかを i とすれば他方は $-i$ であり、そこから同値な複素数の構成ができるということです。繰り返しますが、 $i = +i$ の方が主役なのではありません。 $-i$ も数学的に全く同じ役割を果たします。ということは、 i も $-i$ も **ある意味同じもの**なのです。ここでもヒトの正の数びいきの特徴が出ています。

さて、 $a < 0$ のときは

$$R(a) = \{\sqrt{-a}i, -\sqrt{-a}i\}$$

です。そこで、実数 a, b に対して

$$R(a)R(b) = R(ab)$$

と定めてみましょう。 $a < 0, b < 0$ のときは $ab > 0$ であり、これはすでに実数の平方根で論じたときに出てきた $R(ab)$ です。したがって、これをリサイクルして使えばうまくいきます。

$$\begin{aligned} R(-2)R(-3) &= \{-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\}\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\} \\ &= \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\} = R(6) \end{aligned}$$

では、 $a < 0$ のとき、 $R(a)$ の 2 つの複素数から **自然な** 代表元を選ぶにはどうしたらよいのか？ もちろん、数学的にはどちらをとっても構いませんが、人間が楽に認知できるように、つまり、 **$a \geq 0$ のときと理論が一貫するように**、実部が 0 以上の方を選んでくるべきです。

$$R(2i) = \{-(1 + i), \mathbf{1 + i}\}$$

つまり、 $a \neq 0$ に対して $z = \sqrt{-a}i$,

$$R(a) = \{-z, z\}$$

と書きましょう。 $-z, z$ から、実部が正の方を選べばよいわけ
です。しかし、ここで本質的な問題があります。

$a > 0$ のときは、

$$R(a) = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$$

の 2 つに完全に大小（正か負か）を決めることができましたが、 $a < 0$ のときはそうではありません。つまり、 $-\sqrt{-a}i$ と $\sqrt{-a}i$ は実部が両方とも 0 なので、ヒトの脳特性によるひいきは自動的ににははたらかないのです。

複素数の本を読むと、たまに $\sqrt{-1}$ という記号が登場します。厳密な数学論文でもこう書く研究者がいます。これは実はかなり深遠な記号です。繰り返しますが、

$$R(-2) = \{-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\}$$

の 2 つのうちどちら自然かということについて特に、合意はありません。

つまり、その自然な方を記号 “ $\sqrt{-2}$ ” で表したいとすると、それは、ある意味 $-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i$ の **どちらでもよい** ということであり、つきつめるとある意味 **両方でもよい** のです。

このどちらでもよい、両方でもよいという議論については明確に理論が整備されています。

写像、同値類、体、同型 と
いう用語で完全に記述が可能です。(大学 3 年生くらいの代数学)

$\mathbf{R}, \mathbf{C}$ を実数、複素数全体の集合とします。これらは**体**という構造を備えた集合です。

$\mathbf{R}(i)$ で $\mathbf{R}$ に i ($i^2 = -1$) を添加してできる体を表すと、体の同型

$$\mathbf{C} \cong \mathbf{R}(i) \cong \mathbf{R}(-i)$$

が存在します。この意味で、個々の集合では、複素数として $i \neq -i$ なのですが、 $\mathbf{C}$ の方は i を考えても、 $-i$ を考えても「同じ」ものが構成できます。要するに、言ってみれば xy 平面を考えて、 y 軸の向きを上を正にするか、下を正にするかだけの差です。

まとめ

- 数学には等式がたくさん登場する。何が何とどんな意味で等しいかを考えて議論することが大切。同じ 2 つの対象がある意味等しいこともあるし、また違う意味で等しくないこともありうる。このような話はよく物議を醸す。
- ヒトも動物なので、脳の特性が集合知としての数学に現れている。
- その良い例として、実数や複素数の平方根がある。

ありがとうございました。