

オイラーの五角数定理

小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2022 年 6 月 18 日

今日の話

整数の分割に関する五角数漸化式とオイラーの五角数定理の紹介。
フランクリンの全単射を使った証明を与える。

定理 1 五角数漸化式

定理 2 オイラーの五角数定理

キーワード

- 分割数
- フェラースグラフ
- 五角数

議論は、

分割数→フランクリンの補題→定理 2 →定理 1

の順序で行う。

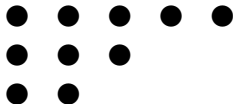
分割

自然数 n の**分割**とは、自然数の単調減少列で、その成分の和が n のものである。もう少し噛み砕いていうと、 n を他の正の自然数の和に分ける方法である。例えば、

$$5 + 3 + 2$$

は 10 の分割。

分割はよく ● を並べて表す（フェラースグラフ）。例えば、 $10=5+3+2$ は



と表せる。分割の各項を**和因子**と呼ぶ。

分割数

$p(n)$ で非負整数 n の分割の個数を表す。ただし、 $p(0) = 1$ と約束する。

例えば、 $n = 1$:

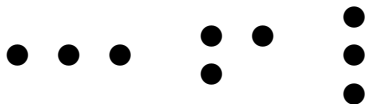


$n = 2$:



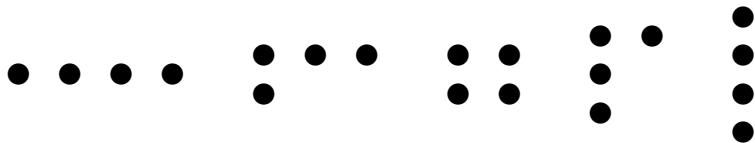
より $p(1) = 1, p(2) = 2$.

$n = 3 :$



より、 $p(3) = 3$.

$n = 4 :$



より $p(4) = 5$.

同様にして、 $p(5) = 7$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	...

数列 ($p(n)$) は単調増加。ただし、その増え方は不規則に見える。ただ、何らかの関係式が存在するのでは？

定理 1 : 五角数漸化式 (オイラー)

$$p(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right).$$

ただし、右辺の和の中で $p(k)$, $k < 0$ という項が現れたら $p(k) = 0$ と解釈する。したがって、右辺は実際には有限和である。

証明はあとまわしにして、まずは例を見ていこう。

$p(6)$ は $\{p(5), p(4), p(1)\}$ で計算できる。

計算例

$$\begin{aligned} p(6) &= p(6-1) + p(6-2) - p(6-5) \\ &= p(5) + p(4) - p(1) = \textcolor{red}{7} + \textcolor{red}{5} - \textcolor{red}{1} = \textcolor{blue}{11} \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11

$p(7)$ は $\{p(6), p(5), p(2), p(0)\}$ で計算できる。

計算例

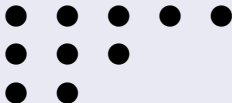
$$\begin{aligned} p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) \\ &= \mathbf{11} + \mathbf{7} - \mathbf{2} - \mathbf{1} \\ &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15

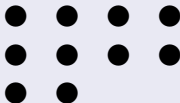
定理 1 の証明には、**相異なる**分割と**五角数**の話が必要である。
(なお、正確な $p(n)$ を表す公式は存在するが、かなり複雑である)

相異なる分割

n の分割が**相異なる**とは、各和因子が相異なることをいう。



は $5+3+2$ で相異なる分割、



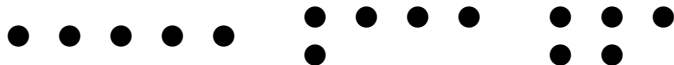
は $4+4+2$ なのでそうではない。

$P_0(n) = n$ の偶数個の相異なる和因子への分割から成る集合

$P_1(n) = n$ の奇数個の相異なる和因子への分割から成る集合

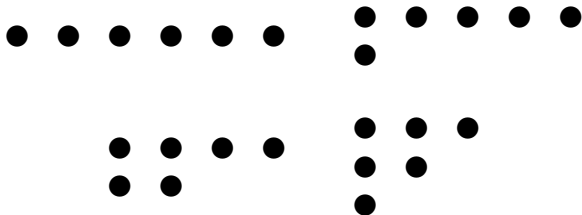
とし、さらに $p_0(n) = |P_0(n)|$, $p_1(n) = |P_1(n)|$ とおく。

$n = 5 :$



なので $p_0(5) = 2, p_1(5) = 1$.

$n = 6 :$



なので $p_0(6) = 2, p_1(6) = 2$.

表にしてみよう。

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$p_0(n)$	0	0	1	1	2	2	3	...
$p_1(n)$	1	1	1	1	1	2	2	...

$p_0(n), p_1(n)$ の差は $-1, 0, 1$ のどれかであることが観察できる。(実際、これはすべての n について正しい)

この 3 つのケースは、 n がどんな数のときに、起こるのだろうか？ それが次の五角数の話と関わって来る。

五角数

五角数とは、 $e_m = \frac{1}{2}m(3m - 1)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
の形に表される非負整数のことである。

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
e_m	0	1	5	12	22	35	51	70	92	...
e_{-m}	0	2	7	15	26	40	57	77	100	...

五角数の名前の由来：

$$e_2 = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}, \quad e_{-2} = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \end{array}$$

$$e_3 = \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \end{array}, \quad e_{-3} = \begin{array}{ccccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \end{array}$$

のように正方形と三角形を合わせると、五角形ができるから。

フランクリンの補題

五角数符号を

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} (-1)^m & n = e_m \\ 0 & n \neq e_m \end{cases}$$

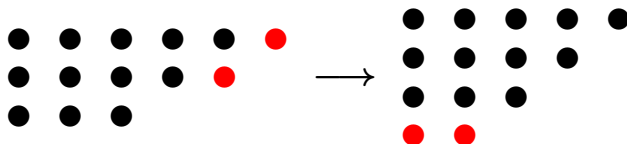
で定めると、次の式が成り立つ。

$$p_0(n) = p_1(n) + \varepsilon(n).$$

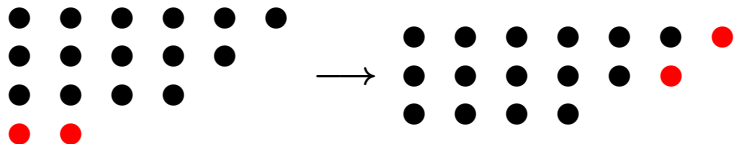
証明： $P_0(n)$ と $P_1(n)$ 間の分割の対応を次のように定める。
(フランクリン全単射)

n の相異なる分割を考えて、

(1) 右端の対角線が最小の和因子より短いときは、対角線を最小の和因子になるように移動する。

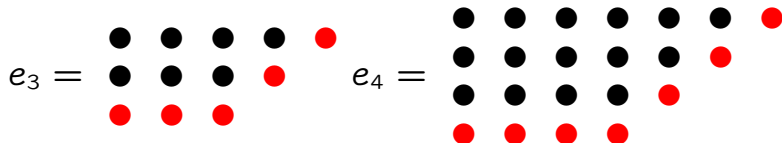


(2) 右端の対角線が最小の和因子より等しいか長いとき、最小の和因子を右端の対角線の隣に 1 つずつ移動する。



(1), (2) は互いの逆操作であり、和因子の個数の偶奇を変えるので、 $P_0(n)$ と $P_1(n)$ の間に全単射ができそうだが…

ただし、この写像がうまく定義できない分割がある。それは、正方形と三角形から成る五角形の分割である。（このとき、 n は五角数である）



$n = e_m$ の番号 m の偶奇によって、 $p_0(n)$ と $p_1(n)$ の差は ± 1 になる。以上の議論をまとめると、

$$p_0(n) = p_1(n) + \varepsilon(n). \blacksquare$$

$p_0(n)$ と $p_1(n)$ をまとめて扱うため、

$$E(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots$$

という無限積を考えよう。

ためしに、

$$(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)$$

を計算してみると

$$1 - q^2 - q^1 + q^{2+1} - q^3 + q^{3+2} + q^{3+1} - q^{3+2+1}$$

のように $P_0(n)$ に属するものは符号 $+$, $P_1(n)$ は符号 $-$ で数えたものが登場する。

$n \rightarrow \infty$ とすると、 q^n の係数は $p_0(n) - p_1(n)$ に等しい。
フランクリンの補題により、これは $\varepsilon(n)$ である。

オイラーの五角数定理

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(n) q^n.$$

定理 1 再掲: 分割数の五角数漸化式 (オイラー)

$$p(n) = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} (p(n - e_m) + p(n - e_{-m})).$$

ただし、右辺の和の中で $p(k)$, $k < 0$ という項が現れたら $p(k) = 0$ と解釈する。

証明：

$$E(q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{e_m}$$

の両辺に

$$E(q)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$$

をかけて

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{e_m} \right)$$

と書き直し、両辺の q^N の係数を比べると、分割数の五角数漸化式が導ける。 ■

- 分割数の研究の歴史は長く、ヤコビ、ガウス、オイラー、シルベスター、マクマホン、ロジャース、ラマヌジャン、アンドリュースなど名だたる数学者が名を連ねる。
- 数論、組み合わせ理論などへの応用も多い。今回紹介したのはほんの一部。

参考文献：アンドリュース&エリクソン、整数の分割、数学書房、2006.

ありがとうございました。