浜田の素因数色彩の理論

小林雅人

神奈川大学＆一橋大学

2022 年 8 月 1 日

概要

浜田忠久 (2018) による素因子の分布の理論の一部を私がアレンジして紹介します。自然数 1 つ 1 つでなく、自然数の集合や数列の中に素数がどのように分布しているかを調べるというスケールの大きな話です。

$d(n)$ を自然数 n の約数の個数とする。n が**高度合成数**であるとは、

$$m < n \Longrightarrow d(n) > d(m)$$

が成り立つことをいう。

高度合成数の例

n	1	2	4	6	12	24	36	48	60	$\cdots$
$d(n)$	1	2	3	4	6	8	9	10	12	$\cdots$

6, 12, 24, 60 など約数の個数が多い数が登場する。

エルデシュ、ラマヌジャンなどの例。

$$698377680 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

$$735134400 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$$

さらに、浜田は次の巨大な高度合成数の例を挙げている。

$$293318625600 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

（素数を小さい方からある規則でかけていくと、高度合成数を構成できる）ここから、素因子の分布を調べるというアイディアが生まれた。

以下、素数を小さい順に

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$$

と表すことにする。n を相異なる素数へ素因数分解しよう。

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}.$$

この $e_i = \mathrm{ord}_{p_i}(n)$ を n の p に関する**位数**という。

数列

$$\mathrm{prf}(n) = (\mathrm{ord}_{p_i}(n))_i$$

を n の**素因子指数列（プロフィール）**と呼ぶ。

例えば、$24 = 2^3 \cdot 3^1$ なので、

$$\mathrm{prf}(24) = (3, 1, 0, 0, \ldots).$$

$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ なので、

$$\mathrm{prf}(5040) = (4, 2, 1, 1, 0, 0, \ldots).$$

自然数の素因子は有限個なので、$\mathrm{prf}(n)$ は、有限項のあと無限に 0 が続く数列である。

$n > 1$ とする。$s(n) = \max\{\mathrm{ord}_{p_i}(n)\}$ を n の**強さ**という。

例えば、$n = 24 = 2^{3}3^1$ の場合、強さは **3**.
$n = 5040 = 2^{4}3^2 5^1 7^1$ の場合、強さは **4**.

素因数色彩

数列

$$\mathrm{pc}(n) = \frac{1}{s(n)}\mathrm{prf}(n)$$

を n の素因数色彩という。

$$\mathrm{pc}(24) = \frac{1}{3}\mathrm{prf}(24) = \left(1, \tfrac{1}{3}, 0, \ldots\right)$$

$$\mathrm{pc}(5040) = \frac{1}{4}\mathrm{prf}(5040) = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, \ldots).$$

今度は、自然数の素因子の（個数そのものではなく）分布の割合を示す数列。

　続いて、自然数 1 つ 1 つではなく、自然数の部分集合 A や数列にまで素因子指数列と素因数色彩を拡張する。まずは、次の 2 つのケースを順に論じていく。

- A が有限集合のとき
- A が無限集合のとき

A を $\mathbf{N}$ の有限集合とする。

重複なく $A = \{n_1, \ldots, n_N\}$ と書くことにしよう。A の**素因子数列（プロフィール）**は

$$\mathrm{prf}(A) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{prf}(n_k).$$

これは数列の項ごとの平均をとったものである。

$$s(A) = \max_i \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{prf}(n_k) \right)_i$$

を A の強さ、A の素因数色彩は

$$\mathrm{pc}(A) = \frac{1}{s(A)}\mathrm{prf}(A)$$

とする。こちらも有限項のあと 0 が無限に続く数列。

例えば $A = \{1, 2, ..., 10\}$ のとき

$$1 = 1, 2 = 2^1, 3 = 3^1, 4 = 2^2, 5 = 5^1, 6 = 2^1 3^1,$$

$$7 = 7^1, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2^1 5^1$$

と素因子を数えて平均をとれば、

$$\mathrm{prf}(A) = \left(\frac{8}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, 0, ...\right)$$

を得る。強さは $s(A) = \dfrac{8}{10}$ であり、色彩は

$$\mathrm{pc}(A) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, ...\right)$$

と 2, 3, 5, 7 の素因子の割合が見てとれる。

$A = \{1, 3, 6, 10, 15\}$（最初の 5 つの三角数）の場合。計算すると、

$$\mathrm{prf}(A) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0, \cdots\right).$$

強さは $s(A) = \dfrac{3}{5}$ なので、

$$\mathrm{pc}(A) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0, \cdots\right)$$

三角数の名にふさわしく、A の中に素因子 3 が最も多いことがわかる。

A が無限集合のときは、A 全体の素因子の個数を数えたり、平均をとるわけにはいかないので、工夫が必要である。まず、A の要素を書き出し、小さい順に並べる：

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\},$$

$$a_1 < a_2 < \cdots .$$

各 N に対して

$$A_N = \{a_1, \ldots, a_N\}$$

として、A の素因子数列を

$$\mathrm{prf}(A) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{prf}(A_N),$$

A の**極限色彩**を

$$\mathrm{pc}(A) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{pc}(A_N).$$

と定める。今度は、最後に 0 が続くとは限らない。また、極限をとる際に発散する項が出てくることがあるので、数列の要素に記号 ∞ を許している。

$A = \mathbf{N}$ のとき $A_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ とする。$n \in A_N$ に対して、n の p の位数の期待値は

$$E[\mathrm{ord}_p(n)] = \sum_{i=1}^{[\log_p N]} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{p^i} \right].$$

$N \to \infty$ として（少し議論が必要だが)、

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{p-1}.$$

よって、

$$\mathrm{prf}(\mathbf{N}) = \left(\frac{1}{p_i - 1} \right)_i$$

であり、$\dfrac{1}{p_1 - 1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$ が最大の項。

したがって、極限色彩も同じく

$$\mathrm{pc}(\mathbf{N}) = \left(\frac{1}{p_i - 1}\right)_i = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$$

である。これを**自然色彩**と呼ぶことにしよう。

集合について素因子指数列や色彩を定めたが、自然数列 $(a(n))_n$ についても同様のことを考えることができる。

素因子数列は

$$\mathrm{prf}(a(n))$$

の（存在すれば）$n \to \infty$ の極限、極限色彩は

$$\mathrm{pc}(a(n))$$

の $n \to \infty$ の極限と定める。

階乗数とは、$m!$ と表せる自然数のことである。階乗数列は、$(m!)_m$.

$1, 2, \ldots, m!$ に p の位数が 1 の自然数は $\left[\dfrac{m}{p}\right]$ 個、p の位数が 2 の自然数は $\left[\dfrac{m}{p^2}\right]$ 個、⋯、p の位数が k の自然数は $\left[\dfrac{m}{p^k}\right]$ 個だけある。これらの和をとると

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^k}\right]$$

であり、m を大きくしていくとこの値は

$$\frac{m}{p-1}$$

に近づく。

　したがって、$\mathrm{prf}(m!)$ の強さは $\dfrac{m}{2-1}=m$ であり、$\mathrm{prf}(m!)$ をこれで割ると

$$\mathrm{pc}(m!)=\left(\frac{1}{p_1-1},\ldots,\frac{1}{p_{\pi(m!)}-1},0,\ldots\right)$$

を得る。$m\to\infty$ とすれば、後ろの 0 の項がなくなって、数列

$$\mathrm{pc}((m!)_m)=\left(\frac{1}{p_i-1}\right)_i$$

を得る。これは自然色彩そのものである！

定理

次の 2 つの極限色彩は、ともに自然色彩に等しい。

$$A = \text{集合 } \mathbf{N}$$

$$B = \text{数列 } (m!)_m$$

研究課題：したがって、これらはある意味で「同値」「似ている」と考えることができる。自然数の無限集合や数列を素因子数列で分類すると、何が言えるだろうか？

なお、浜田は、他の集合や数列についても調べている。

- 素数
- 偶数
- 奇数
- 三角数
- 二項係数
- 高度合成数

次に、数列 $(d(n))_n$ を考えてみよう。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	$\cdots$

偶数が多いことに気づくだろう。

$d(n)$ の偶数性

$d(n)$ は偶数 $\iff$ n は平方数ではない。

証明.

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$$

と素因数分解しよう。

$$d(n) = (e_1 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

であるから、$d(n)$ は偶数
$\iff$ $e_1 + 1, \ldots, e_k + 1$ の少なくとも 1 つは偶数
$\iff$ $e_1, \ldots, e_k$ の少なくとも 1 つは奇数
$\iff$ n は平方数ではない。 $\blacksquare$ $\square$

数列 $(d(n))$ については、実は、これだけではなくさらに細かい結果があります。

ハーディ・ライト

$$\liminf_{n\to\infty} d(n) = 2$$

これは、要するに素数は無限個あるということです。
$(d(n) = 2 \iff n$ は素数$)$

ハーディ・ライトの結果をまねて、上極限や下極限を考えてみると

$$\liminf_{n\to\infty}(\mathrm{ord}_2(d(n))) = 1$$

が成り立ちます。つまり、$4k+1$ 型の奇素数 p は無限に存在し、それは平方数ではないので、$d(p) = p+1$ は偶数。さらに、$d(p) = 4k+2$ は 2 で割り切れるが 4 では割り切れないため、2 での位数は 1.

定理（浜田）

数列 $(d(n))_n$ を考える。

$$\mathrm{pc}(d(n)_n) = (\infty, 0.30057, 0.04228, \dots).$$

特に、

$$\limsup_{n\to\infty}(\mathrm{ord}_2(d(n))) = \infty.$$

これは、$d(n)$ が偶数になるような n はとても多いだけでなく、その 2 の位数もどんどん大きくなっていくということです。

証明は浜田の記事を参照。

シュリニヴァーサ・ラマヌジャン（1887-1920）は、高度合成数や $d(n), \sigma(n)$、自然数を三角数や平方数の和に表す方法の関係式について結果を出しています。（古典的なオイラー、ガウス、ヤコビ、ルジャンドルの結果の別証明）これについては、また紹介します。

ありがとうございました。
参考文献：浜田忠久、素因数色彩の理論、2018.