

ゼータ関数 2: ～ディリクレ級数とオイラー積～

連続講義第 3 回
小林雅人

神奈川大学&一橋大学

2020 年 12 月 7 日

目次

今日の話

ディリクレ級数とオイラー積を用いるとゼータ関数をより詳しく調べられる。

キーワード

- ゼータ関数
- ディリクレ級数
- オイラー積
- オイラー因子

数学には、

無限積＝無限和

という形の等式がたくさん存在する。

例

$\sin x$:

$$x \left(1 - \frac{x^2}{1^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \cdots = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

オイラーの五角数定理：

$$(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots = 1 - q^1 - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots$$

この他にもたくさん存在するのではないだろうか？

→その通り。特にゼータ関数。

ゼータ関数

$s \geq 2$ を満たす自然数 s に対して、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \dots$$

$\zeta(s)$ の無限和＝無限積

$s \geq 2$ を満たす自然数 s に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

が成り立つ。ただし、積はすべての素数 p についてとる。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を**ディリクレ級数**、

$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ を**オイラー積**と呼ぶ。

なぜ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

が成り立つ？

アイディア：次の2つを組み合わせる。

- 素因数分解
- 幾何級数

素因数分解

各自然数 $n \geq 2$ は素数の積に一意的に分解できる：

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

ここで、 $p_1, \dots, p_k$ は n によって決まる相異なる素数、 $m_1, \dots, m_k$ は自然数。

幾何級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$$

ディリクレ級数=オイラー積 の証明：素数 p と $s \geq 2$ に対して $|p^{-s}| < 1$ だから、

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots$$

が成り立つ。これらをかけ合わせると

$$\begin{aligned} & (1 - 2^{-s})^{-1}(1 - 3^{-s})^{-1}(1 - 5^{-s})^{-1} \dots \\ &= (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots)(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \dots)(1 + 5^{-s} + 5^{-2s} + \dots) \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{2^s 3^s} + \dots, \end{aligned}$$

つまり

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

となる。

この

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

から何ができるのか？

応用

- 部分和
部分和 $\longleftrightarrow$ 部分積の対応
- 交代和
符号をつけた和も計算できる

オイラー因子

$(1 - p^{-s})^{-1}$ を p に対する **オイラー因子** と呼ぶことにする。

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

から **あるオイラー因子を取り除いたり、変更したりすると、新しい和が登場する。**

応用 1 : 奇数に関する和

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta_{\text{odd}}(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = ?$$

定理

$$\zeta_{\text{odd}}(2) = \frac{3}{4}\zeta(2).$$

証明：和でなく積で考える。

$$\begin{aligned}\zeta_{\text{odd}}(2) &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ &= \prod_{p \geq 3} (1 - p^{-2})^{-1} \\ &= (1 - 2^{-2}) \underbrace{(1 - 2^{-2})^{-1} \prod_{p \geq 3} (1 - p^{-2})^{-1}}_{\zeta(2)} \\ &= \frac{3}{4} \zeta(2).\end{aligned}$$

同様の例

$\zeta(3)$ をアペリ定数とする。

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k)^3}$$

$$A_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)^3}$$

$$A_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)^3}$$

$$A_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)^3}$$

とすると、

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \zeta(3).$$

各 A_j は $\zeta(3)$ のどれくらいの割合を占める？

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k)^3} = \frac{1}{4^3} \zeta(3) = \frac{1}{64} \zeta(3),$$

$$A_1 + A_3 = \sum_{n:\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p} \geq 3} (1 - p^{-3})^{-1}$$

$$= (1 - 2^{-3}) \underbrace{(1 - 2^{-3})^{-1} \prod_{p \geq 3} (1 - p^{-3})^{-1}}_{\zeta(3)} = \frac{7}{8} \zeta(3).$$

などが分かる。

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)^3} = \zeta(3) - (A_0 + A_1 + A_3) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{64} - \frac{7}{8}\right) \zeta(3) = \frac{7}{64} \zeta(3)
 \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{10^3} + \cdots = \frac{7}{64} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \right)$$

が成り立つ。

※この議論は、ほかの $s \geq 2$ でも成り立つので、いろいろな部分和が計算可能。

応用 2

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

交代和

$$\zeta_{\pm}(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = ?$$

定理

$$\zeta_{\pm}(2) = \frac{1}{2}\zeta(2)$$

証明：偶数のみにマイナスの符号をつけるわけだから、ベキ級数の等式

$$\frac{1 - 2x}{1 - x} = 1 - x - x^2 - x^3 - \dots$$

を利用して、2 に対するオイラー因子を ($x = 2^{-2}$ と考えて)

$$E_2 = \frac{1 - 2 \cdot 2^{-2}}{1 - 2^{-2}}$$

とすればよい。よって、

$$\begin{aligned}\zeta_{\pm}(2) &= \frac{1 - 2 \cdot 2^{-2}}{1 - 2^{-2}} \prod_{p \geq 3} (1 - p^{-2})^{-1} \\ &= (1 - 2 \cdot 2^{-2}) \underbrace{\frac{1}{1 - 2^{-2}} \prod_{p \geq 3} (1 - p^{-2})^{-1}}_{\zeta(2)} = \frac{1}{2} \zeta(2)\end{aligned}$$

まとめ

- $\zeta(s)$ はディリクレ級数とオイラー積の2種類の表示をもつ。
- この等式の成立の背景には素因数分解と幾何級数がある。
- オイラー積を応用するとゼータの部分和や交代和を簡単に計算できる。

展望

- もっといろいろな部分和を計算してみる
- ベルヌーイ数とオイラー因子の関係を見つける。

$$\prod_p (1 - p^{-2n})^{-1} = \zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \mathbf{B}_{2n}$$

(ベルヌーイ数はオイラー因子をどのように含んでいるか？
前回のリクエストでは、中川さんと梶田くんにベルヌーイ数を計算してもらいました)

2021 年 話したいこと

- ゼータの仲間： L 関数
- $\{\zeta(2n + 1)\}$ の謎
- インドの魔術師 ラマヌジャン解説

ありがとうございました。質問、コメントをどうぞ。