

ゼータ 9

累乗数と重複ゼータ級数

連続講義第 10 回
小林雅人

神奈川大学 & 一橋大学

2021 年 7 月 5 日

今日の話

累乗重複度という新しいアイデアをもとに、**重複ゼータ級数**
 $\zeta_{\text{mult}}(2)$, $\zeta_{\text{mult}}(4)$ の値を計算

(2021 年 9 月に日本数学会で発表予定)

ゼータ関数

$s \geq 2$ を満たす自然数 s に対して、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \dots$$

ゼータ偶数値は次のようになる。

$2s$	$\zeta(2s)$	$2s$	$\zeta(2s)$
2	$\frac{\pi^2}{6}$	12	$\frac{691\pi^{12}}{638512875}$
4	$\frac{\pi^4}{90}$	14	$\frac{2\pi^{14}}{18243225}$
6	$\frac{\pi^6}{945}$	16	$\frac{3617\pi^{16}}{325641566250}$
8	$\frac{\pi^8}{9450}$	18	$\frac{43867\pi^{18}}{38979295480125}$
10	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	20	$\frac{174611\pi^{20}}{1531329465290625}$

$\zeta(2s)$ は、1 にかなり近い。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493 \dots ,$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.08232 \dots ,$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.010734 \dots ,$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} = 1.004077 \dots ,$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1.00099 \dots$$

実際、 $\{\zeta(2s)\}$ は $s \rightarrow \infty$ で 1 に近づいていく。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

の拡張として、**重複ゼータ級数**

$$\zeta_{\text{mult}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{mult}(n)}{n^s}$$

のようなものを考えてみたい。

ただし、 $\text{mult}(n)$ は自然数で累乗重複度。

累乗数

自然数 N が**累乗数**であるとは、

$$N = m^n, \quad m, n \text{ は自然数}, n \geq 2$$

と表せることをいう。

累乗数の例

1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, $\dots$

累乗数 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ 乗数} \\ 3 \text{ 乗数} \\ 4 \text{ 乗数} \\ \dots \end{array} \right.$

$\zeta(n)$ は n 乗数の逆数の和

$\zeta(n) (n \geq 2)$ を全部足すと？

$$\zeta(2) = \mathbf{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$\zeta(3) = \mathbf{1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

$$\zeta(4) = \mathbf{1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

$$\zeta(5) = \mathbf{1} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$

$\cdots$

“1”があるため、これらの総和は無限大に発散する。これでは少し面白くないので、1 は除いて考える方がよい。

狭義の累乗数

自然数 N が**狭義の累乗数**であるとは、

$$N = m^n, \quad n \geq 2$$

かつ $N \neq 1$ が成り立つことをいう。

では、 $\zeta(n) - 1 (n \geq 2)$ を全部足すと？

$$\zeta(2) - 1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$\zeta(3) - 1 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

$$\zeta(4) - 1 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

$$\zeta(5) - 1 = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$

...

実は、これらの総和は有限値になる。有限値どころか、整数である。

$$\zeta(2) - 1 = 0.6449 \dots$$

$$\zeta(3) - 1 = 0.2020 \dots$$

$$\zeta(4) - 1 = 0.0823 \dots$$

$$\zeta(5) - 1 = 0.0369 \dots$$

$\dots$

定理 (Shallit-Zikan 1983)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = 1.$$

注意：

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = 1$$

は、書き換えると

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} = 1$$

となる。この等式を示せばよい。

証明.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} &= \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^n = \\ \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \right) &= \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = 1.\end{aligned}$$



同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}$$

も示せる。

注意：

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{2}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{3}{64} + \cdots$$

は単に狭義累乗数の逆数の和ではない。**重複がある。**

例えば

$$16 = 2^4 = 4^2$$

だから、

$$\frac{1}{16}$$

は $\zeta(2)$ と $\zeta(4)$ に 1 回ずつ (計 2 回) 出て来る。また、

$$\frac{1}{64}$$

は $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(6)$ に 1 回ずつ (計 3 回) 出て来る。

では、一般に自然数 N を n^m のように表す方法は何通り？

累乗重複度

$\text{mult}(N)$

を $N = n^m$, (m, n は自然数) と表す方法の個数とする。ただし、 $\text{mult}(1) = 1$ と定める。

(ここでは $m = 1$ も許している)

mult(N) の計算法

N を素因数分解して

$$N = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k},$$

p_j は素数、 a_j は自然数とする。

$\text{mult}(N) = (a_1, \dots, a_k)$ の公約数の個数

例

$$N = 64 = 2^6$$

“6”の公約数は 4 つあるから、 $\text{mult}(64) = 4$.

$$N = 2^8 3^{12}$$

8, 12 の公約数は 3 つあるから、

$$\text{mult}(2^8 3^{12}) = 3.$$

考察

- すべての N に対して、 $\text{mult}(N) \geq 1$.
- N が狭義の累乗数 $\iff \text{mult}(N) \geq 2$.
- p が素数ならば $\text{mult}(p) = 1$.

mult の不等式

$N \neq 1$ のとき、

$$\text{mult}(N^2) \geq \text{mult}(N) + 1.$$

証明：自然数 N に対して、 $N = n^m$, ($n \geq 2$) という表現があれば、 $N^2 = n^{2m}$, ($n \geq 2$) が成り立つ。さらに、 N^2 にはもう 1 つ " $(N^2)^1$ " という自明な累乗表現があるから、

$$\text{mult}(N^2) \geq \text{mult}(N) + 1.$$

定理 1 ($\zeta_{\text{mult}}(2)$)

$$\begin{aligned}\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{mult}(N)}{N^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{2}{9^2} + \cdots \\ &= \frac{7}{4} = 1.75.\end{aligned}$$

比較：

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = 1.644 \cdots$$

証明：Shallit-Zikan の定理を使う。

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{mult}(N)}{N^2} = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) - 1 \right) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}.$$

定理 2 ($\zeta_{\text{mult}}(4)$)

$$\begin{aligned}\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{mult}(N)}{N^4} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{2}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{3}{8^4} + \frac{2}{9^4} + \cdots \\ &= \frac{15}{8} - \frac{\pi}{4} \coth(\pi) = 1.0866 \dots\end{aligned}$$

比較：

$$\zeta(4) = 1.0823 \dots$$

証明：Shallit-Zikan の定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}$$

と

定理（山形さんのゼータワンの結果の系）

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\zeta(2n) - 1) = -1 + \frac{\pi}{2} \coth(\pi).$$

を使う。

つまり、

$$(\zeta(2) - 1) + (\zeta(4) - 1) + (\zeta(6) - 1) + \cdots = \frac{3}{4}$$

から

$$(\zeta(2) - 1) - (\zeta(4) - 1) + (\zeta(6) - 1) - \cdots = -1 + \frac{\pi}{2} \coth(\pi)$$

を引いて 2 で割ると

$$(\zeta(4) - 1) + (\zeta(8) - 1) + \cdots = \frac{7}{8} - \frac{\pi}{4} \coth(\pi)$$

を得る。この両辺に 1 を足すと

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{mult}(N)}{N^4} = \frac{15}{8} - \frac{\pi}{4} \coth(\pi)$$

を得る。

展望

- 他の重複ゼータ級数の計算
例えば $\zeta_{\text{mult}}(6)$, $\zeta_{\text{mult}}(8)$.
- mult の性質を調べる。

$$\text{mult}(N^3) = ?$$

$$\text{mult}(N^4) = ?$$

ありがとうございました。

文献：

- 山形さんのゼータワン関数
- <https://ja.wikipedia.org/wiki/リーマンゼータ関数>