

Gessel の基本的準対称関数の定理 の拡張

小林雅人

神奈川大学

松村朝雄 & 杉本将吾（国際基督教大学）
との共同研究

2025/8/19

1 インTRODクシヨン

2 Young 図形と Schur 関数

3 準対称関数

4 主定理と展望

概要

Young 盤の Schur 関数（対称関数）に関する **Gessel の定理**を他の盤にまで拡張できたという話です。

キーワード

- 対称関数
- 準対称関数
- Schur 関数
- SSOT

Young 図形と対称関数の理論

- 代数的、数え上げ組合せ論
- 対称群、結晶基底の表現論
- Schubert 多様体

$x = (x_1, \dots,)$ **無限個**の変数

$$f(x) \in \mathbf{C}[[x]],$$

$$S_\infty = \sqcup S_n \quad \text{とする。}$$

定義

f が**対称**とは、次の両方が成り立つことをいう。

- $\sigma f = f, \quad \sigma \in S_\infty.$
- $\deg f < \infty.$

symmetricfunctions.com によると、130 種類は対称関数の族が存在する。その中で重要なクラスとして、特に **Schur 関数**がある。

対称関数は形式的ベキ級数なので、収束は気にしない。**関数**という用語は、多項式でないというニュアンスで用いている。

定義

対称関数全体の集合

$$\text{Sym} = \mathbf{C}[[x]]^{S_{\infty}}.$$

Sym は無限次元**ベクトル空間**

基底は $\{s_{\lambda} \mid \lambda \text{ は分割}\}$ 。したがって、 $f \in \text{Sym}$ は

$$f = \sum c_{\lambda} s_{\lambda}$$

と 1 通りに表せる。

ベクトル空間の議論はこれで終わり。

内積空間としての Sym

事実

Sym にある内積が存在して

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

ここから、

$$f = \sum c_\lambda s_\lambda$$

と表したときの係数も分かる。内積空間としてはこれで終わり。

だが、Sym には、もう少し構造がある。

対称関数の積も対称なので、Sym は**次数付き代数**。
基底の積は、

$$s_{\lambda} s_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\nu}$$

で、 $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ は Littlewood-Richardson 係数という
もの。

これらの古典的な Sym の議論はほとんど終わった。(1970 年代ころまで)

次は？ それが、対称関数を**準対称関数**の和に分解する。という発想である。

Gessel (古くは Stanley) が 1984 年にこのような関数を導入した。その解説のためには…Young 図形の話が必要。

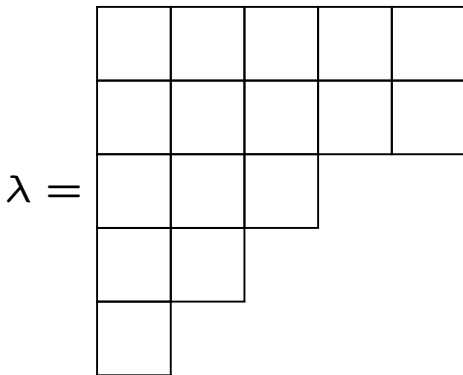
1 イン트로ダクション

2 Young 図形と Schur 関数

3 準対称関数

4 主定理と展望

分割 (Young 図形) とは自然数の有限の広義単調減少列。



Young 盤とは、Young 図形の箱それぞれに数字を入れたもの。

8	1	6	2
4	7	7	

Young 盤が**半標準**とは、箱の数字が次の 2 条件を満たすこと。

- 行は広義単調増加。
- 列は狭義単調増加。

単項式で重みをつける。

1	1	1	5
4	6		

$$x_1^3 x_4 x_5 x_6$$

$x = (x_1, \dots)$ 無限変数

Schur 関数

$$s_\lambda = \sum_T x^T$$

T は形が λ のすべての半標準盤にわたってとる。

Bender-Knuth 1974

s_λ は対称関数

半標準盤の標準化

半標準盤 T に対して左から 1 に番号をふる。次に、2 に左から通し番号をふる。このようにしていくと、箱の全てに番号をふることができる。箱の中の数字をそれで置き換えてできる盤を T の**標準化**という。

例

 $T =$

1	1	8
2	7	

 $T^{\text{st}} =$

1	2	5
3	4	

$$T_1 \sim T_2 \iff T_1^{\text{st}} = T_2^{\text{st}}$$

と決めると、 $\sim$ は同値関係。この同値関係を使って、 s_λ を同値類上の和に分けたい。

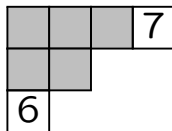
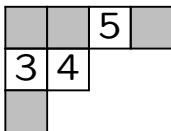
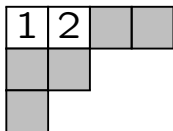
水平帯とは、箱の列で、箱は左下から右上に進み、各列に箱は高々 1 つで、左から連続した整数の列が入るものをいう。

		7	8
	6		
5			

例えば $T =$

1	2	5	7
3	4		
6			

 であれば、



このような水平帯の大きさの列を T の**降下**列とい
い、 $\text{des}T$ で表す。

$$T_1 \sim T_2 \implies \text{des} T_1 = \text{des} T_2$$

なので、この同値類上の**不変量** $\text{des} T$ を使うと、
Schur 関数を以下の準対称関数でうまく分解できる。

1 イントロダクション

2 Young 図形と Schur 関数

3 準対称関数

4 主定理と展望

Def

$a = (a_1, \dots, a_m)$ を自然数の列とする。 a に対する**単項的準対称関数**とは、

$$M_a(x) = \sum x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_m}^{a_m}.$$

ただし、和は $i_1 < \cdots < i_m$ となるすべての自然数の組 $(i_1, \dots, i_m)$ にわたってとる。

例えば、

$$M_{74}(x) = x_1^7 x_2^4 + x_1^7 x_3^4 + \cdots + x_2^7 x_3^4 + \cdots$$

である。(これは対称関数ではない)

次に、 $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$
($m \leq n$) を自然数列とする。 b が a の**分解**である
とは、ある $i_1, \dots, i_m, i_{m+1}$ が存在して
 $1 = i_1 < \dots < i_{m+1} = n + 1$,

$$a_j = b_{i_j} + \dots + b_{i_{j+1}-1}$$

が各 $j = 1, \dots, m$ について成り立つことをいう。

例えば $a = (\textcolor{red}{7}, \textcolor{blue}{4})$ なら

$$(\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{6}, \textcolor{blue}{4}), (\textcolor{red}{2}, \textcolor{red}{5}, \textcolor{blue}{3}, \textcolor{blue}{1})$$

などは a の分解。

Def

自然数列 a に対する Gessel の**基本的準対称関数**とは、

$$F_a(x) = \sum_{b \in \text{ref}(a)} M_b(x)$$

である。ただし、記号 $\text{ref}(a)$ は a の分解の集合を表す。

$$\begin{aligned} F_{23} = & M_{23} + M_{221} + M_{212} + M_{2111} \\ & + M_{113} + M_{1121} + M_{11111} \end{aligned}$$

Gessel の定理 (1984)

$$s_{\lambda}(x) = \sum_{T \in \text{ST}(\lambda)} F_{\text{des}T}(x).$$

ここで、 $\text{ST}(\lambda)$ は形が λ の標準的な盤全体の集合。

例

$$s_{32} = F_{32} + F_{23} + F_{221} + F_{131} + F_{122}$$

似たようなことを他のクラスの盤の生成関数でやろう！

1 イントロダクション

2 Young 図形と Schur 関数

3 準対称関数

4 主定理と展望

Gessel の定理の拡張。

Thm (K.-松村-杉本 (2025+))

ある**振動盤**と**半標準振動盤**というクラスの盤が存在して、後者の生成関数は Gessel の定理のような分解をもつ。

古典 標準盤 & 半標準盤

新 振動盤 & 半標準振動盤

どういう方向性？

$$\text{Sym} \subseteq \text{QSym}$$

- Schur 関数は、タイプ A の結晶基底の理論によく登場。実は、Gessel の準対称関数は、2023 年ころ登場した**準結晶**（結晶グラフの分解）の特性関数に等しい。タイプ C の結晶グラフでも似たような分解ができる、というのが主定理の深い部分です。
まだ研究は始まったばかり。

ありがとうございました。

- Kobayashi-Matsumura-Sugimoto,
Quasi-symmetric functions, semistandard
oscillating tableaux and quasi-crystals,
in preparation.