

無限集合 2

小林雅人

神奈川大学 & 一橋大学

2022 年 3 月 7 日

前回 (2022/2/7)

- 部分集合、写像、全単射、濃度
- 無限集合とは？
- 可算集合と非可算集合
- カントールの定理： $\mathbf{R}$ は非可算集合

概要

写像や無限集合の復習をしてから、カントールの定理の証明、 $\aleph_0$ の最小性などの証明をします。

数学は**イデア**の世界の学問です。点は面積をもたない、直線には幅がない、のように理想的な存在（**数学的実在**）を仮定します。その中でも、やはり**無限**という概念は最たるものでしょう。これはいろいろと物議を醸します。

- ウサギとカメのパラドックス
- ヒルベルトのホテル

集合論の歴史

ペアノ、カントール、ラッセル、ヒルベルト、ゲーデル、フォン・ノイマン...

知っておくとよいこと

- 無限を扱うには、かなり慎重に議論をする必要がある。集合論の用語に馴染むとうまくいく。
- ひとくちに無限といっても、いろいろな種類の無限がある。
- 無限の世界ではいろいろと奇妙なことが起こる。

復習

A, B : 集合

$a \in A$ ならば $a \in B$ が成り立つとき、 A は B の**部分集合**であるといい、 $A \subseteq B$ で表す。

$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ のとき、 $A = B$ とする。

$B \subseteq A$ かつ $B \neq A$ となる集合 B を A の**真部分集合**という。

例： $A = \{1, 2\}$ ならば

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

が A の部分集合。このうち、真部分集合は

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}$$

の 3 つ。

写像

A, B を集合とする。

各 $a \in A$ に対して、ある要素 $f(a) \in B$ を対応させる規則があるとき、 f を A から B への**写像**であるといい、記号 $f : A \rightarrow B$ で表す。

$$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{-1, -2, -3\}, \quad f(x) = -x,$$

$$g : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty), \quad g(x) = x^2$$

写像の性質

$f: A \rightarrow B$ を写像とする。各 $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$ となるとき、 f は**全射**であるという。また、

$$f(a_1) = f(a_2), a_1, a_2 \in A \implies a_1 = a_2$$

のとき f は**単射**であるという。

2つのグループ

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

があり、 A のメンバーがそれぞれ B のメンバーからひとりを選んでプロポーズをする。

- 全射は B の全員がプロポーズされること
- 単射は A の各メンバーのプロポーズの相手が全員異なること

全単射、同型

$f: A \rightarrow B$ が全射かつ単射のとき、**全単射**であるという。
 A と B の間に全単射が存在するとき、集合 A, B は**同型**である
といい、記号 $A \cong B$ で表す。

同型という用語

ベクトル空間 V と W の間に全単射の線形写像が存在するとき、
 V, W は**ベクトル空間として同型**であるといい、記号 $V \cong W$ で
表す。(圏論と関連)

(復習終わり)

A が**無限集合**であるとは、ある A の部分集合 B が存在して

$$B \cong A, \quad B \neq A$$

が成り立つことをいう。

B は A の**真**部分集合であって、しかも A と**同型**になるという
(やや不思議な) 現象が起きている。

余談

10^{120} を **1 不可思議** と呼ぶ。このネーミングは、数がとても多くなると不思議なことが起こるという発想から来ている。実際、ヒトが線形に扱える数字は

0 ~ 100000

くらいまでで、それ以降は感覚が対数的になってしまうようだ。
(例えば、 10^{20} を 10^{10} の 2 倍だと感じてしまう)

ならば、無限の世界では奇妙なこと、人智を超えたことが起きてもなんら不思議ではない。

無限集合の濃度

A, B を無限集合とする。無限濃度 $|A|, |B|$ の大小関係を

$$A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$$

で定める。 $(A \subsetneq B \text{ かつ } |A| = |B| \text{ となってもよい})$

ベルンシュタインの定理

2つの単射

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow A,$$

が存在すれば

$$|A| = |B|.$$

今回は証明は省略。

定理 (カントール)

任意の空でない集合 A に対して、 $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $a \mapsto \{a\}$ は単射である。一方、単射 $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ は存在しない。したがって、

$$|A| \leq |\mathcal{P}(A)|.$$

前者の証明

$$f(a) = f(b) \implies \{a\} = \{b\} \implies a = b$$

なので f は単射である。

後者の証明（背理法）単射 $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ が存在すると仮定する。

$$X = \{g(B) \mid B \in \mathcal{P}(A), g(B) \notin B\}, \quad x = g(X)$$

とおく。 X は A の部分集合なので $x = g(X) \in A$.

$x \notin X$ と仮定すると、 X の定義より $x = g(X) \in X$ となり矛盾。 $x \in X$ と仮定すると、

$$B \in \mathcal{P}(A), x = g(B), g(B) \notin B$$

となる B が存在する。 $g(X) = x = g(B)$ と g の単射性から、 $X = B$. よって、 $x = g(B) \notin B = X$ であり矛盾。 ■

可算濃度

自然数全体の集合

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

の濃度を記号 $\aleph_0$ (アレフ・ゼロ) で表し、**可算濃度**と呼ぶ。

定理

A を無限集合とすると、単射 $f : \mathbf{N} \rightarrow A$ が存在して

$$|A| \geq \aleph_0.$$

つまり、無限濃度の中で $\aleph_0$ は**最小**のものである。

証明： A を無限集合とする。 A は空集合ではないから、
 $a_1 \in A$ がとれる。次に、

$$a_2 \in A \setminus \{a_1\}$$

をとり、さらに

$$a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$$

をとっていく。 A は無限集合なので、この操作は無限に続けられる。 $f: \mathbf{N} \rightarrow A, f(n) = a_n$ とすると、構成により

$$f(m) = f(n) \implies a_m = a_n \implies m = n$$

であるから、 $f: \mathbf{N} \rightarrow A$ は単射である。したがって、

$$|A| \geq |\mathbf{N}| = \aleph_0. \blacksquare$$

無限濃度の中で $\aleph_0$ は**最小**のものだが、**最大**のものは存在しない。(カントールの定理を使うと、無限濃度の狭義単調増加列を構成できる)

$$|\aleph_0| < |A_1| < |A_2| < |A_3| < \dots$$

これは、自然数全体と状況が酷似している。

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots$$

A の部分集合全体の集合 $\mathcal{P}(A)$ を 2^A とも書く。その濃度を $2^{|A|}$ で表そう。上で見たように、

$$|A| \leq 2^{|A|}$$

である。記号 $\aleph_1$ で実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の濃度を表すことにすると、実は、

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

が成り立つ。

- 連続体仮説：

$$\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph_1$$

となる無限集合 A が存在するか？

- 無限集合 A, B があるとき

$$|A| \leq |B|, \quad |A| = |B|, \quad |A| \geq |B|$$

のどれか 1 つが必ず成り立つか？

ありがとうございました。

参考文献

集合と位相、内田伏一、裳華房